# 气体压强的产生（图形动画）

气体的压强是大量分子的对器壁的碰撞产生的，求证：压强的公式为

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^{2}}$$

其中，*m*是分子的质量，*n*是分子数密度，$\overline{v^{2}}$是速度平方的平均值。进而求证：分子的平均平动动能为

$$\overline{ε\_{k}}=\frac{3}{2}kT$$

不考虑分子之间的碰撞，演示分子运动的动画。

## 证明

一个分子对器壁的碰撞是断续的，它什么时候与器壁发生碰撞，在什么地方发生碰撞，给器壁施加了多大的冲量都是偶然的。但是大量分子时时刻刻与器壁碰撞，在宏观上就产生持续的压力，单位面积上的压力就是压强。

如图1所示，取垂直于容器壁指向外侧的方向为*x*轴正向，设容器中理想气体分子的质量为*m*，某分子的速度为*vi*，三个分量分别为*vix*，*viy*，*viz*。由于碰撞是完全弹性的，所以碰撞前后*y*和*z*方向的速度分量保持不变，*x*方向的速度分量由*vix*变为-*vix*。根据动量定理，分子所受器壁的冲量为-*mvix* - （*mvix*） = -2*mvix*。根据牛顿第三定律，分子施加给器壁的冲量为

*x*

*m*

*vi*

*vix*

*viy*

*viz*

*Ii* = 2*mvix*

如图2所示，在容器壁上取一面积元d*A*，在一段时间间隔d*t*内，分子恰好与器壁发生碰撞时运动的距离为d*li*= *vix*d*t*。这个距离和面积元形成的柱体的体积为

d*Vi*= d*li*d*A* = *vix*d*t*d*A*

在所有以速度*vi*运动的分子中，只有位于柱体内的分子才能与器壁发生碰撞。单位体积内以速度*vi*运动的分子数为*ni*，所以柱体内这种分子数为

*x*

d*li*=*vix*d*t*

d*A*

d*A*

d*Vi*

d*Ni*= *ni*d*Vi*= *nivix*d*t*d*A*

这些分子施加给器壁的冲量为

d*Ii* = 2*mvix*d*Ni =* 2*mnivix*2d*t*d*A*

对所有速度求和即可求得所有分子施加给面积元的总冲量d*I*。但是速度条件限制为*vix* > 0，这是因为*vix* < 0的分子背离d*A*运动，在d*t*时间内不会与d*A*发生碰撞。可得

$$dI=\sum\_{i（v\_{ix}>0）}^{}dI\_{i}=\sum\_{i（v\_{ix}>0）}^{}2mn\_{i}v\_{ix}^{2}dAdt$$

当气体处于平衡态时，气体分子朝*x*轴正向和负向运动的机会均等，平均来说，*vix* > 0和*vix* < 0的分子各占一半。

因此，将上式右边除以2就可以取消速度限制

$$dI=\sum\_{i}^{}mn\_{i}v\_{ix}^{2}dAdt$$

这就是一群分子施加给器壁的冲量。根据冲量的定义可得气体施加给器壁的压力为d*I*/d*t*，所产生的压强为

$$p=\frac{dI}{dtdA}=m\sum\_{i}^{}n\_{i}v\_{ix}^{2}.$$

气体处于平衡态时，*x*方向速度平方的平均值为

$$\overline{v\_{x}^{2}}=（\sum\_{i}^{}n\_{i}v\_{ix}^{2}）/n$$

由于

$$\overline{v\_{x}^{2}}+\overline{v\_{y}^{2}}+\overline{v\_{z}^{2}}=\overline{v^{2}}$$

所以

$$\overline{v\_{x}^{2}}=\overline{v^{2}}/3$$

从而证得

$$p=nm\overline{v\_{x}^{2}}=\frac{1}{3}nm\overline{v^{2}}$$

可见：气体分子的质量越大，速度平方的平均值越大，单位体积内分子的个数越多，气体产生的压强就越大。从公式的推导过程可知：压强是大量分子集体行为的宏观表现，是一个统计结果，单个分子不存在压强的概念。

根据阿伏伽德罗定律*p=nkT*，联立上式可得

$$\sqrt{\overline{v^{2}}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

这是方均根速率。分子的平均平动动能为

$$\overline{ε\_{k}}=\frac{1}{2}m\overline{v^{2}}=\frac{3}{2}kT$$

结果说明：大量分子的平均平动动能与绝对温度成正比，与气体种类无关。气体的温度是大量气体分子平均平动动能的量度，是大量分子无规则热运动的集体表现，具有统计的意义，单个分子或少数几个分子是没有温度概念的。这就是温度的微观实质。

## 图示

在一个平面上取1000个分子，初始状态如图3所示，箭杆表示分子运动的方向和相对大小，但是第一个分子例外，其箭杆特别长。当分子运动时，箭杆指示了第一个分子的运动方向。分子运动有快有慢，每时每刻都有分子与器壁发生碰撞，从而产生持续的压强。注意：由于不考虑分子的碰撞，而分子与器壁的碰撞是弹性的，因此一个分子的速率在运动中是不变的。实际上，分子之间存在着频繁的碰撞，正是通过分子间的碰撞，能量才能按自由度均分。



## 算法

按均匀分布随机产生分子的坐标，按正态分布随机产生分子的速度。不考虑分子之间的碰撞，分子在与器壁发生碰撞前做匀速直线运动。设分子速度为*vx*和*vy*，经过时间Δ*t*，发生的位移分别为Δ*x*=*vx*Δ*t*和Δ*y*=*vy*Δ。设分子的初始坐标为(*x*0,*y*0)，经过时间Δ*t*的坐标分别为*xt*=*x*0+Δ*x*和*yt*=*y*0+Δ*y*。

(*x*0,*y*0)

Δ*y*

Δ*x*

Δ*x*′

(*xm*,*y*)

(*xt*,*yt*)

Δ*y*′

如图4所示，当分子与右壁发生碰撞时，横坐标为*xm*，纵坐标为

*y*=*y*0+(*xm*-*x*0)

取(*xm*,*y*)为新的起点，碰撞后速度*vx*的方向发生改变，位移为

Δ*x*′=-[Δ*x* – (*xm* – *x*0)]，Δ*y*′=-[Δ*y* – (*y* – *y*0)]

从而可确定碰撞后的坐标：*xi*=*xm*+Δ*x*′，*yi*=*y*+Δ*y*′。

当分子与左壁（上壁或下壁）发生碰撞时，同样可求得碰撞点的坐标和碰撞后的坐标。

分子的个数是可调节的参数。

## 程序

%气体分子运动的动画(不考虑分子之间的碰撞)

clear %清除变量

n=input('请输入分子个数:'); %键盘输入分子个数（1）

%n=1000; %不加箭杆时分子个数参考值

%n=50; %加箭杆时分子个数参考值

rand('state',0) %均匀分布随机数初始化

randn('state',0) %正态分布随机数初始化（2）

xm=1.4e-6; %横坐标范围

ym=1e-6; %纵坐标范围

x0=xm\*(2\*rand(1,n)-1); %分子初始横坐标

y0=ym\*(2\*rand(1,n)-1); %分子初始纵坐标（3）

figure %创建图形窗口

plot([-1,1,1,-1,-1]\*xm,[-1,-1,1,1,-1]\*ym,'LineWidth',3)%画器壁

axis equal off %使纵横坐标间隔相等

axis([-xm,xm,-ym,ym]) %设置坐标范围

title('气体分子与器壁的碰撞(不考虑分子间的碰撞)','FontSize',16)%标题

text(xm,ym,['\itN\rm=',num2str(n)],'FontSize',12)%显示粒子数

vx=randn(1,n); %分子x速度

vy=randn(1,n); %分子y速度（4）

hold on %保持图像

for i=1:n %按分子循环

 h(i)=plot(x0(i),y0(i),'.','MarkerSize',15,'Color',rand(1,3));%画点并取句柄（5）

% hh(i)=quiver(x0(i),y0(i),vx(i),vy(i),1e-7);%画分子的箭杆取句柄（6）

end %结束循环

hh=quiver(x0,y0,vx,vy); %画所有分子的箭杆取句柄

h1=quiver(x0(1),y0(1),vx(1),vy(1),1e-6);%画第一个分子的箭杆取句柄（7）

dt=1e-7; %时间间隔

pause %暂停（8）

set(hh,'UData',zeros(1,n),'VData',zeros(1,n))%去箭杆（9）

%while 1 %无限循环

% if get(gcf,'CurrentCharacter')==char(27) break,end%按ESC键结束

while get(gcf,'CurrentCharacter')~=char(27)%不按ESC键循环

 for i=1:n %按分子循环

 xx=x0(i); %取横坐标

 yy=y0(i); %取纵坐标

 dx=vx(i)\*dt; %取横位移

 dy=vy(i)\*dt; %取纵位移

 if xx+dx>xm %如果超过右边界

 y=yy+dy/dx\*(xm-xx); %计算与右壁碰撞的纵坐标

 set(h(i),'XData',xm,'YData',y)%设置点的坐标

 x0(i)=xm; %右壁横坐标

 y0(i)=y; %右壁纵坐标

 dx=-(dx-(xm-xx)); %反弹横位移

 dy=dy-(y-yy); %反弹纵位移

 vx(i)=-vx(i); %速度反向

 end %结束条件

 if xx+dx<-xm %如果超过左边界

 y=yy+dy/dx\*(-xm-xx); %计算与左壁碰撞的纵坐标

 set(h(i),'XData',-xm,'YData',y)%设置点的坐标

 x0(i)=-xm; %左壁横坐标

 y0(i)=y; %左壁纵坐标

 dx=-(dx-(-xm-xx)); %反弹横位移

 dy=dy-(y-yy); %反弹纵位移

 vx(i)=-vx(i); %速度反向

 end %结束条件

 if yy+dy>ym %如果超过上边界

 x=xx+dx/dy\*(ym-yy); %计算与上壁碰撞的横坐标

 set(h(i),'XData',x,'YData',ym)%设置点的坐标

 x0(i)=x; %上壁横坐标

 y0(i)=ym; %上壁纵坐标

 dx=dx-(x-xx); %反弹横位移

 dy=-(dy-(ym-yy)); %反弹纵位移

 vy(i)=-vy(i); %速度反向

 end %结束条件

 if yy+dy<-ym %如果超过下边界

 x=xx+dx/dy\*(-ym-yy); %计算与下壁碰撞的横坐标

 set(h(i),'XData',x,'YData',-ym)%设置点的坐标

 x0(i)=x; %下壁横坐标

 y0(i)=-ym; %下壁纵坐标

 dx=dx-(x-xx); %反弹横位移

 dy=-(dy-(-ym-yy)); %反弹纵位移

 vy(i)=-vy(i); %速度反向

 end %结束条件

 x0(i)=x0(i)+dx; %新的起点横坐标

 y0(i)=y0(i)+dy; %新的起点纵坐标

 set(h(i),'XData',x0(i),'YData',y0(i))%设置点的坐标（10）

% set(hh(i),'XData',x0(i),'YData',y0(i),'UData',vx(i),'VData',vy(i))%设置箭杆

 end %结束循环

 set(h1,'XData',x0(1),'YData',y0(1),'UData',vx(1),'VData',vy(1))%设置第一个分子的箭杆（11）

 drawnow %刷新屏幕

end %结束循环

quiver(x0,y0,vx,vy); %画所有分子的箭杆（13）

## 说明

（1）程序执行时从键盘输入分子个数，例如1000。

（2）将正态分布随机数和均匀分布随机数初始化之后，可重复相同的运动，否则可演示不同的运动。

（3）分子的坐标是随机选取的。

（4）分子的速度也是随机选取的。

（5）用随机点表示分子，分子的颜色也是随机选取的。

（6）用箭杆表示分子速度的方向。

（7）第一个分子的箭杆单独画出来。如果要演示所有分子运动的方向，句柄要取在循环中，此句改为

hh(i)=quiver(x0(i),y0(i),vx(i),vy(i),le – 6);

（8）在显示分子初始状态后，按回车键就演示分子的运动。

（9）将分子箭杆的长度设置为零就消除了箭杆。

（10）设置分子的坐标就演示分子的运动。

（11）设置第一个分子的箭杆，可指示第一个分子的运动方向。如果要显示所有分子的速度方向，此句要放在循环中

set(hh(i),'Xdata’,x0(i),'YData', y0(i),'UData',vx(i),’VData',vy(i))

但是，如果分子数很多，分子运动就显得太慢。

（12）用简单的方法画第一个分子的轨迹，轨迹在分子与墙碰撞前有一点断裂。

（13）最后用箭杆表示分子运动的方向。