# 2.5 矩阵行列式

矩阵[行列式](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F)是一个特殊的函数，它可以将一个正方矩阵映射为一个实数，正方矩阵**A**的行列式通常用符号det**A**表示。行列式描述的是一个线性变换对“体积”所造成的影响。此外，当线性方程组对应的行列式不为零时，由[克莱姆法则](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%8B%E8%90%8A%E5%A7%86%E6%B3%95%E5%89%87)，可以直接以行列式的形式写出方程组的解。但是，我们使用行列式的主要目的是为了用它得到逆矩阵（2.7节的主题）。此外，还可以证明：当且仅当正方矩阵**A**的行列式det**A**≠0时，它才是可逆的。这个结论非常有用，因为它提供了一个判断矩阵是否可逆的计算工具。在对行列式下定义之前，我们首先介绍余子式的概念。

## 2.5.1余子式

给定一个*n*×*n*矩阵**A**，余子式是指删除了第*i*行和第*j*列后的(*n* − 1)×(*n* − 1)矩阵。

### 例2.8

找到下列矩阵的余子式、和：



删除第1行和第1列可得：



删除第2行和第2列可得：



删除第1行和第3列可得：



## 2.5.2 定义

行列式是递归定义的；例如，4×4矩阵的行列式是以3×3矩阵的形式定义的，3×3矩阵的定义式是以2×2矩阵的形式定义的，2×2矩阵的定义式是以1×1矩阵的形式定义的（1×1矩阵**A**=[A11]可简单地表示为det[A11] = A11）。

若**A**为一个*n*×*n*矩阵，在*n*＞1时我们可以定义：

 （公式2.4）

回忆一下2×2矩阵的余子式的定义，可以得到以下式子：



若是3×3矩阵，则公式如下：



换成4×4矩阵，公式变为：



在3D图形中，我们主要使用4×4矩阵，所以就不再讨论*n*＞4时的公式了。

### 例2.9

求下面矩阵的行列式：



我们可以得到：

