# 全球定位系统（GPS）的相对论修正

郑庆璋 罗蔚茵

（中山大学物理系 广东广州 510275）

（收稿日期：2011-04-15）

**摘要**：讨论对全球定位系统（GPS）中卫星钟与地面钟的相对论修正，指出一天下来，卫星钟比地面钟的走时率要快约38 μs，在这段时间内，光走过约11 km的距离，若不作修正，则结果是没有实用意义的。此外，进一步分析指出，运动效应使卫星钟比地面钟一天走慢约7 μs；引力效应使卫星钟比地面钟一天走快约45 μs。

**关键词**：全球定位系统 卫星钟 地面钟 相对论修正

## 1 引言

传统的观念认为，狭义相对论的运动学效应只有在微观世界中才明显出现，才有实际应用；而广义相对论则由于引力微弱，只有在宇观世界方显作用。然而，自从全球卫星定位系统（GPS）开发以来，情况大为改观。

全球定位系统GPS（Global Positioning System）至少由24颗绕地极卫星所组成，分成6个轨道，运行于约 20 200 km的高空，绕地球一周约12 h。由此可保证地面上任何地方、任何时刻的接收机，都能无障碍地接收到4颗卫星发射载有卫星轨道数据及时间的无线电信号，实时地计算出接收机所在位置的坐标、移动速度及时间。

由于信息传递速度即光速是不变量，因此精确定位的关键是卫星发射信号的时刻和接收机收到信号的时间差。准确度在30 m之内的GPS接受器就意味着它已经利用了相对论效应的修正。华盛顿大学物理学家Clifford M.Will指出[[1]](#footnote-1)：“如果不考虑相对论效应，卫星上的时钟就和地面上的时钟不同步。”相对论认为，快速运动的钟走时率要比静止的慢；而在较强引力场中的钟也比在较弱引力场中的要慢。Will进一步指出，由于运动原因，GPS卫星钟每天要比地面钟大约慢7 μs；而引力对两者施加了更大的相对论效应，使卫星钟大约每天要比地面钟快45 μs。两种效应共产生38 μs的偏差，在这段时间内，光走过约11 km的距离，可谓“差之毫厘，谬之千里”。

本文在相对论的物理基础上，介绍对GPS时钟不同步修正的基本思想，并粗略做一些数值估算，目的是引起大家对相对论在日常生活应用中意义的重视。

## 2 估算相对论效应的物理基础

为突出主要矛盾，只考虑地球引力场所起的作用。这是我们估算相对论效应对GPS时钟不同步修正的物理基础。

首先，选地心系（坐标原点在地心，坐标轴指向远处恒星）为基本参考系。表面上看，地心绕日公转的加速度约为*a*地心 = 5.9×10−3 m/s2不算很小，但注意到太阳的引力刚好与这点的惯性离心力抵消（等效原理）。因此可以说，相对于太阳引力场（甚至银河系和更远的星系团），地心系是一个局域惯性系。至于这个局域惯性系的适用范围有多大，要视研究问题的性质而定。

对于现在所讨论的问题，地心到日心的距离*R*日 = 1.49×1011 m，GPS卫星到日心的距离与*R*日的最大差距为

Δ*R*日 = *R*地 + *h*卫 = 2.66×107 m

其中*R*地 = 6.4×106 m为地球的半径，*h*卫 = 2.02×107 m为卫星离地面的高度。在这个范围内，太阳的引力场强最大误差值为

*r* = *R*日 = *r* = *R*日 = ·= *g*日·

= 3.57×10−4*g*日 = 3.57×10−4*a*地心

在我们估算的精度（两位有效数字）范围内，只考虑地球引力场所起的作用是可以接受的。

## 3 史瓦西度规

在地心系中，可以不考虑地球的自转而只考虑引力效应，这是因为地球的自转效应与其引力效应相比可以忽略[[2]](#footnote-2)，因此把地球附近的引力场近似地视为球对称的史瓦西（Schwarzschild）引力场，其时空间隔为[1]

d*s*2 = − *c*2d*t*2 + *c*2d*r*2 + *r*2(d*θ*2 + sin2*θ*d*φ*2) （1）

其中*c*为真空中光速，*r*S = 称为史瓦西半径。

注意到 d*s*2 = − *c*2d*τ*2以及

d*L*2 = *c*2d*r*2 + *r*2(d*θ*2 + sin2*θ*d*φ*2)

其中d*L*为时空中相邻两点的固有距离[2]，d*τ*为固有时间间隔。（1）式又可写成

− = − （2）

= −

其中*v*为时空点（这里是钟）的运动速度[[3]](#footnote-3)。

## 4 卫星钟和地面钟的相对论修正

若d*τ*卫星和d*τ*地面分别为卫星钟和地面钟的固有时间间隔，则有

= （3）

其中*r*S地 = = 8.9×10−3 m为地球的史瓦西半径，*r*卫星和*r*地面为卫星和地面至地心的距离，*v*卫星和*v*地面为卫星钟和地面钟的运动速度（图 1）。

*v*地面

地球

*v*卫星

*r*卫星

*r*地面

*O*

图1 卫星绕地球运动示意图

考虑到卫星速度比光速小很多，可用经典力学计算。由向心力公式

= *m*

得

*v*卫星2 = = =

即

= （4）

于是（3）式又可写成

= = （5）

代入有关数据，可以算出卫星钟相对于地面钟每秒走快约0.44 ns；其中运动效应走慢约0.08 ns，引力效应走快约0.52 ns。

由于该误差是累积的，因此，要准确定位，就不能不考虑相对论修正。

## 5 结语

（1）相对论的应用不再只是微观世界高速运动的粒子，或宇观世界大尺度时空的“专利”，而是深入到日常生活中的GPS或其他需要精密计算的领域。

（2）卫星钟到地心的距离约为地面钟到地心距离的4倍，而引力场强约为16倍，引力效应使它比地面钟走快很多，每天走快约45 μs；而地面钟与地面连在一起，它的运动速度远小于卫星速度，这就使得卫星钟比地面钟每天走慢约7 μs。总的效应是使卫星钟比地面钟每天走快约38 μs。为什么通常十分微弱的引力在GPS的修正中起主要作用？这是因为运动效应在此情况下更微弱。从（4）、（5）式就容易看到，即使卫星钟运动速度快如卫星，它的运动学效应也只有引力效应的一半。

（3）由于传播信号的速度是光速，38μs 这段时差内，信号传播约11 km的距离，因此如不作修正，对精确定位是没有意义的。当然，本文所作的分析和讨论（包括附录中的数值估算），也只是给出相对论修正的主要结果。如要更进一步提高定位的精度，还要考虑卫星沿着一个偏心轨道，有时离地球较近，有时又离得较远；要考虑地面钟的运动以及太阳引力梯度的影响等，作更深入的分析和细致的精密计算。

### 附录：

（1）有关数值估算

首先估算卫星钟的运动速度。由（4）式知

*v*卫星 = *c* = 3.88×103 m/s

其次考虑地面钟，地面钟与所处的地理位置及 相对于地面的运动有关，若它停在赤道上，则

*v*地面 = = 4.65×102 m/s

与卫星钟相差一个数量级；而相对论运动学效应则是由 确定的，即其效应实际相差两个数量级。因此暂时忽略地面钟的运动也不会对我们的粗略估算产生太大的影响。考虑到 是非常小的微量，其高次项可以忽略，（5）式可以化简为

= = ≈ ≈ 1 − +

≈ 1 + = 1 − + （6）

把 *r*S地 = = 8.9×10−3 m和*r*地面 = 6.4×106以及*r*卫星 = 2.66×107 m代入（6）式，得

≈ 1 − + = 1 + 4.44×10−10

由此可得

= = 4.44×10−10

可见卫星钟在1 s内，比地面钟走快约0.444 ns，而在一天（86 400 s）内走快38.4 μs。

（2）分别考虑引力效应和运动效应

1）考虑引力效应

= = – 1 = – 1 ≈ − 1 ≈ = 5.28×10−10

即卫星钟在1 s内，引力效应使它比地面钟走快约0.528 ns，而在一天（86 400 s）内走快45.4 μs。

2）考虑运动效应

= = – 1 = – 1 ≈ − 1 ≈ − = − = − 8.36×10−11

这就是说，卫星钟在1 s内，运动效应使它比地面钟走慢约0.084 ns，而在一天（86 400 s）内走慢约7.3 μs。

总之，卫星钟在1 s内，由于引力和运动效应，使它比地面钟走快约0.444 ns，一天（86 400 s）内约走快38.4 μs。

### 参考文献

1 郑庆璋，崔世治。广义相对论引论基本教程。广州：中山大学出版社，1991.266

2 俞允强。广义相对论引论（第二版）。北京：北京大学出版社，1997.81

## 注意

在《[关于GPS系统“相对论修正”问题的讨论](https://www.kdocs.cn/l/cfhHG0sQMJ4s)》一文中提出：**“没有相对论就没有GPS”的说法是错误的**，Bilibili视频网站也能搜到相关的讨论。水平有限，不知道哪个观点是正确的。当然，最简单最权威的方法就是直接咨询“北斗导航卫星”的研究人员究竟要不要考虑相对论效应，只是我问不到。

1. 可参阅有关Will的网页<https://www.phys.ufl.edu/~cmw/>。

作者简介：郑庆璋（1933— ），男，教授，主要从事相对论与引力波探测的研究。 [↑](#footnote-ref-1)
2. 若考虑地球的自转，其引力场应是克尔（Kerr）解而不是史瓦西解；但从地球的有关数据估算，发现两者的差异小于10−4。 [↑](#footnote-ref-2)
3. 史瓦西坐标的物理意义，见文献［2］。这里由于卫星的运动速度比光速小得多，因而固有长度和运动长度的区别很小，对后面的计算可以不用考虑。 [↑](#footnote-ref-3)