# 6．如果认为速度与位移成正比，会推导出怎样荒谬的结果？

有一种说法：如果速度 *v* 与位移 *x* 成正比，将会推导出十分荒谬的结果，那么，这个十分荒谬的结果是什么呢？

在自由落体运动中，设 *v* ∝ *x*，即 *v* = *kx*，

0 ~ *t*1 时间段的平均速度 0~*t*1 = ，*x*1 = *t*1 = *t*1。

等式两边消去 *x*1，得到 *t*1 = 。

同理，*t* = *t*2 时，*x*2 = *t*2 = *t*2，两边消去 *x*2，得到 *t*2 = 。

这就是说，无论物体下落的位移是多少，下落所需的时间都是相等的。该结果的确荒谬，同时，这个推导过程也是错误的！

在讲到伽利略对自由落体运动的研究时，有这样一段话：伽利略相信，自然界的规律是简洁明了的。他从这个信念出发，猜想落体运动一定是一种最简单的变速运动，而最简单的变速运动，它的速度应该是均匀变化的。但是，速度的变化怎样才算“均匀”呢？他考虑了两种可能：一种是速度的变化对时间来说是均匀的，即 *v* 与 *t* 成正比，例如，每过 1 s，速度的变化量都是 2 m/s；另一种是速度的变化对位移来说是均匀的，即 *v* 与 *x* 成正比，例如，每下落 1 m，速度的变化量都是 2 m/s。后来他发现，如果 *v* 与 *x* 成正比，将会推导出十分荒谬的结果。

这段叙述很精彩，但对于最后那句“将会推导出十分荒谬的结果”，留下了一段空白。

## 一、错误的推导

有人给出如下的推导，以填补这段空白。

在自由落体运动中，设 *v* ∝ *x*，即 *v* = *kx*，则 *x* = 0 时，*v*0 = 0；*x* = *x*1 时，*v*1 = *kx*1。

0 ~ *t*1 时间段的平均速度 0~*t*1 = ，*x*1 = *t*1 = *t*1。

等式两边消去 *x*1，得到 *t*1 = 。

同理，*x* = *x*2 时，*v*2 = *kx*2。0 ~ *t*2 时间段的平均速度 0~*t*2 = ，*x*2 = *t*2 = *t*2，两边消去 *x*2，得到 *t*2 = 。

这就是说，无论物体下落的位移是多少，下落所需的时间都是相等的，这个结果的确十分荒谬。

仔细思考，会发现这个推导过程存在一定问题，既然已经假设 *v* ∝ *x*，即假设速度随位移均匀变化，那就否定了速度随时间均匀变化，从而 = 的结论不成立。可以说这里偷换了概念，把速度随时间均匀变化而得到的平均速度的概念，偷偷换了过来。得出这个“十分荒谬”的结论，到底是因为“速度随位移均匀变化”的前提错了，还是推导过程中间使用了错误的“平均速度”的概念呢？无法确定！

## 二、正确的推导

在自由落体运动中，设 *v* ∝ *x*，某时刻 *t* 的位移为 *x*，则该时刻的速度 *v* = *kx*。

选取该时刻后的很小一段时间 d*t*，这段时间内的位移 d*x* = *kx*·d*t*，即 d*t* = 。

从位置 *x*0 到 *x*1 这一过程所需的时间 *t*1 = = = ln*x* |= （ln*x*1 – ln*x*0）。

从位置 *x*0 到 *x*2 这一过程所需的时间 *t*2 = = = ln*x* |= （ln*x*2 – ln*x*0）。

这个结论并不荒谬，只是十分复杂，与伽利略认为的自然界的规律是简单的相去甚远。

## 三、评论

第二种推导过程，肯定不是伽利略做的，因为他那个时代微积分还没有问世。

第一种推导过程，是不是伽利略做的，我不知道。但无非是两种可能：这不是伽利略做的，而是后人给出的推导过程；这的确是伽利略本人做的，他因此确定 *v* ∝ *x* 的假设是错误的，从而否决了它，认定应该是 *v* ∝ *t*，并得出了正确的结果。如果是前者，就绝对不应该在课堂上讲解，因为它不利于准确理解物理概念，是百害无一利的。如果是后者，那么伽利略实际上犯了个错误，虽然他得出的否定 *v* ∝ *x* 的结论是正确的，但这属于歪打正着。当然我们并不需要为尊者讳，即使伽利略当时犯了这样的错误，仍然无愧于他的伟大。但作为教师必须给学生讲清楚，不能这样推导，特别要向学生强调，只有随时间按线性规律变化的物理量，某段时间的平均值才等于其首、末值的算术平均值，这是中学生应该掌握的。