# 41．单摆做的是怎样的简谐运动？

单摆在小角度摆动的条件下，近似是简谐运动，其中随时间按正弦规律变化的是偏转的角度，因此是角简谐运动。

但如果我们沿摆球运动的轨迹建立曲线坐标，以平衡位置为原点，运动轨迹为圆弧，则它也可以是线简谐运动。

单摆的振动是近似的简谐运动，但与弹簧振子的振动有所不同，它不是沿直线运动，而是沿一条圆弧运动。

## 一、单摆是近似的角简谐运动

单摆是一种理想模型，它由一段质量可以不计且不可伸长的细线和一个可视为质点的重球组成。单摆的振动与弹簧振子的振动有两点不同：①弹簧振子是沿直线的振动，而单摆的振动是沿一段圆弧的振动；②弹簧振子的振动是严格的简谐运动，而单摆的振动是近似的简谐运动。总体来说，单摆是近似的角简谐运动。

图 1 所示是单摆振动的示意图，Oʹ 点是细线的悬点，也就是单摆转动的中心，O 点是运动轨迹的中点。某一时刻单摆位于图中所示的位置，用角坐标 *θ* 表示它的位置坐标，OOʹ 向右为正，向左为负。此时重球受到两个力的作用，其中线的拉力 *T* 沿细线方向指向 Oʹ 点，对 Oʹ 点的力矩为 0，重力 *mg* 竖直向下，对 Oʹ 点的力矩为 *M* = *mgL*sin*θ*，方向沿顺时针转动方向，即力矩 *M* 的方向为垂直纸面向里，而角位置 *θ* 的方向为垂直纸面向外，二者方向相反。在摆动角度 *θ* 很小的条件下，sin*θ* ≈ *θ*，即转动力矩 *M* = *mgL*·*θ*。

图 1 单摆振动

Oʹ

O

*θ*

*T*

*m*

*mg*

我们已知简谐运动的动力学条件为“作用力与位移成正比，与位移的方向相反”，用公式表示是 *F* = − *kx*，用角量表示做角简谐运动的条件是“作用力的力矩大小与角位移成正比，与角位移的方向相反”，用公式表示是 *M* = − *kθ*，前面得出的关系式是 *M* = *mgL*·*θ*，其中 *mgL* 是常量，负号表示方向相反，符合角简谐运动的条件。

用角量表示的动力学方程为 *mgL*·*θ* = *m* ，解此微分方程得到 *θ* = *θ*maxcos(*ωt* + *φ*0)，即单摆振动过程中，角位移 *θ* 是时间 *t* 的余弦函数，其中 *ω* 由摆长 *L* 和重力加速度 *g* 决定，峰值 *θ*max 及初相位 *φ*0 由初始条件决定。

因此，单摆的振动是角简谐运动，但由于前面用到了小角度条件下 sin*θ* ≈ *θ* 的近似关系，因此，单摆是近似的角简谐运动。

## 二、用弧线坐标描述单摆的振动

对于单摆，可以采用弧线坐标，从而认为它是沿弧线运动的“线简谐运动”。如图 2 所示，沿其运动轨迹的圆弧线建立坐标轴，以平衡位置处作为弧线坐标的原点 O，向右为正方向，偏离平衡位置的弧线 *x* 即为位移，其大小为 *x* = *Lθ*，此时，沿圆弧切线方向的回复力 *F* = − *mg*sin*θ*，在角位移 *θ* 很小的条件下，sin*θ* ≈ *θ*，则回复力 *F* = − *mgθ* = − *x*，这说明单摆在角位移 *θ* 很小的条件下满足简谐运动的动力学条件，从而满足 *x* = *A*cos(*ωt* + *φ*0)的关系（美国 F.W.Sears 所著的《大学物理学》就是采用这种方法处理的）。

图 2 用弧线坐标描述单摆运动

Oʹ

O

*θ*

*T*

*m*

*mg*

*x*

## 三、用势能判据看单摆的振动

对于做振动的质点，只要其势能曲线有极小值，就会有振动。若势能曲线的极小处呈抛物状，即除了任意常量项外，势能 *U* 只包含从平移位置算起的位移 s（或角位移）的平方项：*U*（*s*）= *U*0ʺ*s*2，则恢复力 *f*恢 与位移 *s* 方向相反，且呈线性关系：*f*恢 = − d*U*（*s*）/d*s*，振动可用正弦函数来表达：*s*（*t*）= *A*sin（*ωt* + *φ*0）（赵凯华、罗蔚茵著《新概念物理教程力学》第 1 版第 264 页）。

单摆的振动，在平衡位置处有势能的极小值，因此它的运动是振动，但是不是简谐运动，有必要做进一步分析。如图 1 所示，平衡位置为图中的 O 点，某时刻，角位移为 *θ*，则它的重力势能 *E*p = *mgL*(1 – cos*θ*)，表面看不具有 *U*(*s*)= *U*0ʺ*s*2 的形式，不好说是简谐运动。

利用三角函数的半角变换公式，有 1 – cos*θ* = 2sin2，在满足小角度的条件下，sin*θ* ≈ *θ*，则单摆的势能 *E*p = *mgL*(1 – cos*θ*) ≈ *mgLθ*2，从而具有 *U*(*s*)= *U*0ʺ*s*2 的形式。由于用到了 sin*θ* ≈ *θ* 的近似条件，因此单摆的振动是近似的简谐运动。