# 34．动能定理可以表述为合外力的功等于物体动能的增量吗？

多个力对物体做功的情况下，动能定理常见的表述有两种：①外力对物体做功的代数和等于物体动能的增量，用公式表述是 ∑*W* = Δ*E*k；②合外力对物体做的功等于物体动能的增量，用公式表述是 *W*合外力 = Δ*E*k。这两种表述是等价的。

动能定理是牛顿运动定律的合理推论，中学只讲质点的动能定理，一般表述为：外力对质点所做的功，等于质点动能的增量，即 *W* = Δ*E*k。但一般情况下，对一个物体（质点，下同）做功的外力不止一个，这种情况下，动能定理又该如何表述呢？

## 一、两种表述是等价的

多个力对同一物体做功的情况，动能定理一般有两种表述方式：其一表述为各力对

物体做功的代数和，等于物体动能的增量，即 ∑*W* = Δ*E*k；其二表述为合外力对物体所做的功等于物体动能的增量，即 *W*合外力 = Δ*E*k。

这两种表述是等价的。如果物体受到的各力都是恒力，我们先假设一种简单的情况，某物体受到两个恒力 ***F***1 和 ***F***2 的作用，发生的位移为 *l*，如图 1（a）所示。图 1（b）是一个简单的几何证明：把力 ***F***1 和 ***F***2 合成的平行四边形的四个顶点标注为 A、B、C、D，分别由 B、D、C 向 AAʹ 作垂线，垂足分别为 Bʹ、Dʹ、Cʹ，则 ABʹ 和 ADʹ 的长度分别表示力 ***F***1 和 ***F***2 沿位移方向的分力的大小，而 ACʹ 则表示合力 ***F*** 沿位移方向的分力的大小。从几何关系上看，ACʹ = ADʹ + DʹCʹ，其中 DʹCʹ = ABʹ （DʹCʹ 是 DC 在 AAʹ 方向上的投影的长度，而 DC 段与 ***F***1 相等），因此可证明合力 *F* 沿位移方向的分力与 *F*1 和 *F*2 沿位移方向的分力之和相等，因此合力 ***F*** 对物体所做的功，与两分力 ***F***1 和 ***F***2 对物体所做的功的和相等。

图 1 合力的功与分力功的和相等

（a）

A

Aʹ

*F*

*F*1

*F*2

*l*

（b）

A

Aʹ

*F*

*F*1

*F*2

*l*

Cʹ

Bʹ

Dʹ

D

B

C

受到的力如果是变力，则可以把整个过程分为若干小段（或分为无穷多小段），每小段都可以看作恒力，则每小段的合力所做的功都等于各分力所做的功的总和，最后把所有各小段的结果累加，合力的功与各分力的功的代数和相等的结论仍然成立。

## 二、两种解决问题的思路

上面两种不同的表述，表示两种不同的解决问题的思路。利用 *W*合外力 = Δ*E*k 解决问题的思路是：先求出各分力的合力，然后求该合力对物体所做的功，即等于物体动能的增量。如果物体受到的力是变力，则需把整个过程分成若干小段，使得每小段都是恒力（或可以看作恒力），分别求出每小段的合力及它所做的功，再加起来即为总功。利用 ∑*W* = Δ*E*k 解决问题的思路是：分别求出各分力对物体所做的功，再求它们的代数和。如果物体受到的力中有变力存在，同样要分为若干小段，分别求解再相加，最后求各力所做的功的代数和。

下面用一个在前面第 29 篇“[中学物理和大学普通物理教科书中，功的定义有什么不同？](https://enjoyphysics.cn/Article3446)”中引用过的例题，采用另一种思路来讨论。

**例** 一个质量为 *m*，带有电荷 – *q* 的小物体，可在水平轨道 *Ox* 上运动，*O* 端有一个与轨道垂直的固定墙。轨道赴于匀强电场中，场强大小为 *E*，方向沿 *x* 轴正向，如图 2 所示。小物体以初速度 *v*0 从 *x*0 点沿 *Ox* 轨道运动，运动时受到大小不变的摩擦力 *f* 作用，且 *f* < *qE*。设小物体与墙壁碰撞时不损失机械能，且电量保持不变，求它在停止运动前所通过的总路程。

*O*

*x*

*E*

*m*，− *q*

图 2 带电物体在匀强电场中的运动

*x*0

*x*1

本题中的小物体在水平方向上受到两个力的作用，其中电场力是恒力，其大小 *F* = *qE*，方向向左；摩擦力是变力，大小恒为 *f*，方向与运动方向相反。

采用第一种思路，即先求合力，再求合力的功。需要分解成许多小段，使得每小段中的力都是恒力。设初速度 *v*0 方向向左，那么它第一小段运动方向向左，摩擦力方向向右，电场力方向向左，由于 *f* < *qE*，因此做加速运动，直到与竖直墙壁相碰撞，并以原速率返回。碰后运动方向向右，摩擦力和电场力方向都向左，因此做减速运动，至速度减为零时位置为 *x*1（图中示意性地标出）。以后小物体一直做往复运动，经无穷多次碰撞后，最终停止在 *x* = 0 处，即墙壁旁。

从开始运动到第一次速度减为零，外力做功及动能变化的关系为

（*qE* − *f*）*x*0 − （*qE* + *f*）*x*1 = 0 − *mv*02 ①

到第二次速度减为零，有（*qE* − *f*）*x*1 − （*qE* + *f*）*x*2 = 0； ②

到第三次速度减为零，有（*qE* − *f*）*x*2 − （*qE* + *f*）*x*3 = 0； ③

到第四次速度减为零，有（*qE* − *f*）*x*3 − （*qE* + *f*）*x*4 = 0； ④

……

由上面的式可得 *x*1 = ，

由②式及以下各式，可得 = = = …… = < 1，

小物体从开始运动到最后停止，通过的总路程 *s* = *x*0 + 2（*x*1 + *x*2 + *x*3 + ……）。

不难看出，括号内的各项是一个无穷递缩等比数列，其首项 *x*1 和公比 *q*ʹ 都已经求出，代入求和公式 ∑ = 可求出结果：∑ = = 。

则总路程 *s* = *x*0 + 2∑ = 。如果初速度 *v*0 的方向向右，解题的思路不变，只是第一次速度减为零的位置 *x*1 更偏向右边，但最后所得结果不变，为了减少篇幅，这里不再写出，读者可自行计算。

第二种思路：电场力是恒力，它做的功 *W*电场力 = *qEx*0，摩擦力大小恒为 *f*，方向总与运动方向相反，它做的总功 *W*摩擦力 = − *fs*（式中的 s 是物块运动的总路程）。

则有 *qEx*0 – *fs* = 0 − *mv*02，解得 *s* = 。

这与我们前面用第一种思路，即分别求出各小段过程中合力的功，再求它们的总和，所得的结果相同。

对于这个具体问题而言，第二种思路显然简单得多，这是因为做功的两个力中一个是恒力，另一个是滑动摩擦力，滑动摩擦力的大小不变而方向总与运动方向相反，这两个力的功都可以用简单的方法求出。这两种思路所得的结果是一致的，这是不争的事实。

其实我们再来分析一下前面的①式及后面有编号的诸多式子，它们的左边都是各小段合力所做的功，而右边则是动能的增量，把所有式子的左边都加起来，就是所有各段合力做功的总和，它等于物体动能的增量，这也说明了合力做的功与各分力做功的代数和是相等的。