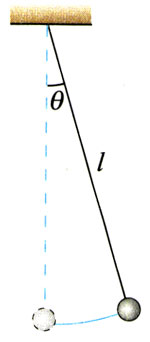
# 第十一章 4 单摆

生活中经常可以看到悬挂起来的物体在竖直平面内摆动，我们用细线悬挂着的小球来研究摆动的规律。

如图11.4-1，如果细线的质量与小球相比可以忽略；球的直径与线的长度相比也可以忽略，这样的装置就叫做**单摆（simple pendulum）**。单摆是实际摆的理想化模型。显然，单摆摆动时摆球在做振动，但它是不是在做简谐运动？

**图11.4-1 单摆**

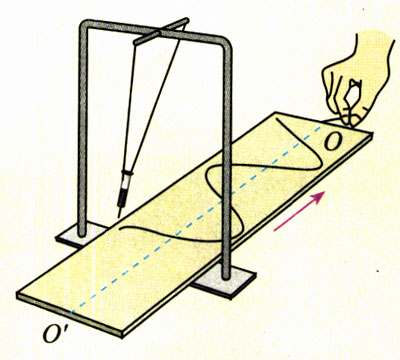


研究单摆时还有一个条件：与小球受到的重力及绳的拉力相比，空气等对它的阻力可以忽略。

为了更好地满足这个条件，实验时我们总要尽量选择质量大、体积小的球和尽量细的线。

### 演示

如图11.4-2，细线下悬挂一个除去了柱塞的注射器，注射器向下喷出一细束墨水。沿着与摆动方向垂直的方向匀速拖动一张白纸，白纸上的墨迹便画出振动图象（*x*-*t*图象）。



**图11.4-2 画出振动图象**

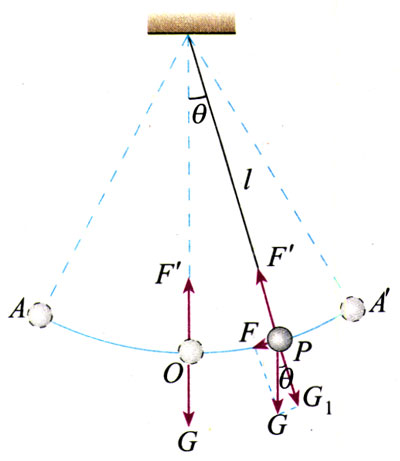
注射器的摆动是不是简谐运动？

## 单摆的回复力

我们在一般条件下研究单摆是不是做简谐运动，最简单的方法是看它的回复力是否满足*F*＝－*kx*的条件。

摆球静止在O点时，悬线竖直下垂，摆球受到的重力*G*与悬线的拉力*F*ʹ平衡。小球受的合力为零，可以保持静止，所以O点是单摆的平衡位置。拉开摆球，使它偏离平衡位置，放手后摆球所受的重力*G*与拉力*F*ʹ不再平衡。在这两个力的合力的作用下，摆球沿着以平衡位置O为中心的一段圆弧AAʹ做往复运动，这就是单摆的振动。

因为摆球沿圆弧运动，因此可以不考虑沿悬线方向的力，只考虑沿圆弧方向的力。当摆球运动到某点P时（图11.4-3），摆球在圆弧方向上受到的只是重力在这个方向的分力*F*＝*mg*sin*θ*，这就是它的回复力。



**图11.4-3 单摆的回复力**

在偏角很小时，摆球对于O点的位移*x*的大小，与*θ*角所对的弧长、*θ*角所对的弦都近似相等，因而sin*θ*≈，所以单摆的回复力为

*F*＝－*x*

其中*l*为摆长，*x*为摆球偏离平衡位置的位移，负号表示回复力*F*与位移*x*的方向相反。由于*m*、*g*、*l*都有确定的数值，可以用一个常数*k*表示，于是上式写成

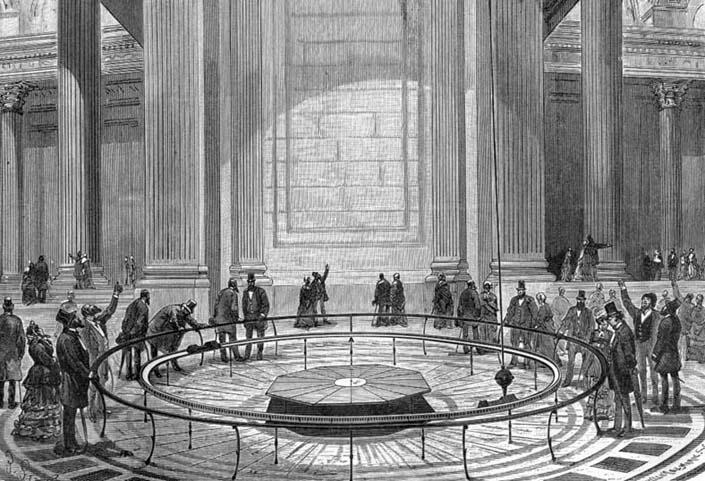
*F*＝－*kx*

可见，在偏角很小的情况下，摆球所受的回复力与它偏离平衡位置的位移成正比，方向总是指向平衡位置，因此单摆做简谐运动。

当角*θ*很小时，用弧度表示时*θ*与它的正弦sin*θ*近似相等；*θ*所对的弦长与它所对的弧长也近似相等。这两个关系的严格证明要用到高等数学，本书不做讨论。

## 单摆的周期

一条短绳系一个小球，它的振动周期很短，天文馆里巨大的傅科摆，周期很长。单摆的周期与什么因素有关？

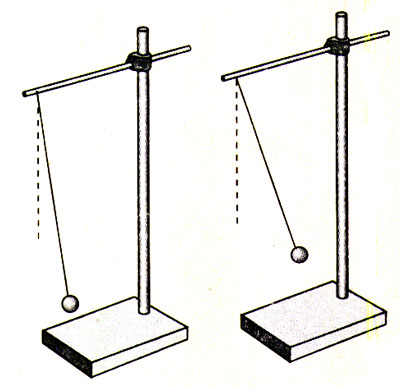


**傅科摆。1851年，傅科（J．Foucault）在巴黎万神殿用长67m的单摆演示了地球自转的效应，摆的周期超过16 s。**

### 演示

单摆的振幅、质量、摆长对周期各有什么影响？

如图11.4-4，在铁架台的横梁上固定两个单摆，按照以下几种情况，把它们拉起一定角度后同时释放，观察两摆的振动周期。



**图11.4-4 单摆振动的周期与什么因素有关？**

1．两摆的振幅不同（都在小偏角下）

2．两摆的质量不同

3．两摆的摆长不同

比较三种情况下两摆的周期，可以得出什么结论？

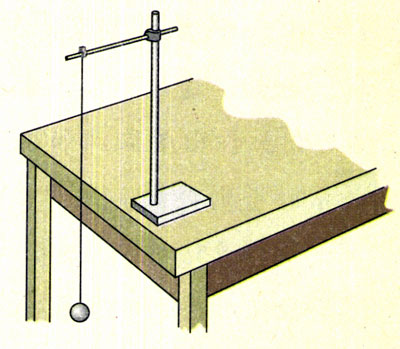
实验表明：单摆振动的周期与摆球质量无关，在振幅较小时与振幅无关，但与摆长有关，摆长越长，周期也越长。

单摆周期与摆长之间有什么定量的关系？

### 实验

**探究单摆周期与摆长的关系**

如图11.4-5，细线的上端固定在铁架台上，下端系一个小钢球，于是做成了一个单摆。测量摆长和摆的周期，得到一组数据；改变摆长，再得到几组数据。从中可以找出周期与摆长的关系。



**图11.4-5 测量不同摆长的单摆的周期**

实验过程中要注意以下几点。

**1．摆的振幅不要太大**

前面的分析中利用了一些近似条件，这些近似只有当摆的振幅不大时才能成立，否则摆的振动不是简谐运动，周期与摆长的关系将会十分复杂。

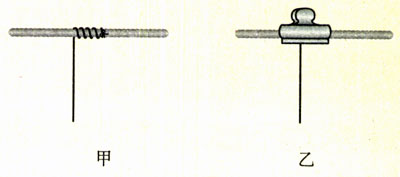
**2．摆线和摆球的选择**

摆线要尽量选择细些的、伸缩性小些的，并且要尽可能长一些。摆球要尽量选择质量大些的、体积小些的。

为什么这样做？

**3．细线上端的悬挂方式**

图11.4-6甲、乙两图画出了细线上端的两种不同的悬挂方式。哪种较好？为什么？



**图11.4-6 细线上端的两种悬挂方式**

**4．摆长的测量**

可以用刻度尺测量细线的长度，用游标卡尺测量小球的直径，算出它的半径，两者之和作为摆长的测量值。

**5．周期测量的要点**

按下停表开始计时，再按下停表计时终止。为了测量周期，摆球到达哪个位置的时刻作为计时开始与停止的时刻比较好？图11.4-7给出了两个选择。你选择哪个？说出道理。



**图11.4-7 哪个位置作为计时的开始与终止更好些？**

**乙 小球经过平衡位置时**

**甲 小球到达最高点时**

可以测量单摆做一次全振动的时间作为它的周期的测量值；也可以测量单摆做多次全振动（例如几十次）的时间，然后通过计算求出它的周期的测量值。哪个方法比较好？为什么？

选择摆线长度和测量摆的周期时，都要考虑到测量的绝对误差和相对误差，建议复习《必修l》后面“学生实验”中的相关知识。

**6．数据分析**

先通过数据分析，对周期*T*与摆长*l*的定量关系做出猜测，例如可能是*T*∝*l*、*T*∝*l*2，或者*T*∝、*T*∝……然后按照猜测来确定纵坐标轴和横坐标轴。例如，通过估算我们认为可能是*T*∝*l*2，那么可以用纵坐标表示*T*，横坐标表示*l*2，作出图象。如果这样作出的图象确实是一条直线，说明的确有*T*∝*l*2的关系，否则再做其他尝试。

设计表格时要注意，表中一定要有原始记录。例如，摆长是由细线长度与小球半径相加得到的，表中不能只出现摆长，一定要有细线长度和球的直径的测量值的记载。

建议在计算机上用数表软件处理数据，这样节省时间，效果又好。

荷兰物理学家惠更斯曾经详尽地研究过单摆的振动，发现单摆做简谐运动的周期*T*与摆长*l*的二次方根成正比，与重力加速度*g*的二次方根成反比，而与振幅、摆球质量无关。惠更斯确定了计算单摆周期的公式[[1]](#footnote-1)

*T*＝2π



**惠更斯（Christiaan Huygens，1629～1695），荷兰物理学家、天文学家、数学家。**

## 用单摆测定重力加速度

由单摆周期公式可得*g*＝，如果测出单摆的摆长*l*、周期*T*，就可以求出当地的重力加速度。

我们在图11.4-5的实验中已经获得了摆长和周期的实验数据，可以从中选择几组，分别计算重力加速度，然后取平均值。

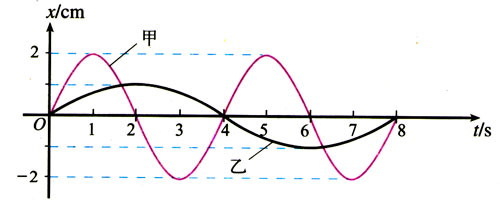
除了计算平均值外，还可以分别以*l*和*T*2为纵坐标和横坐标，作出函数*l*＝*T*2的图象，它应该是一条直线。根据这条直线的倾斜程度求出，进而求出重力加速度*g*。

## 问题与练习

1．一个理想的单摆，已知其周期为*T*。如果由于某种原因（如转移到其他星球）自由落体加速度变为原来的，振幅变为原来的，摆长变为原来的，摆球质量变为原来的，它的周期变为多少？

2．周期是2s的单摆叫做秒摆，秒摆的摆长是多少？把一个地球上的秒摆拿到月球上去，已知月球上的自由落体加速度为1.6m/s2，它在月球上做50次全振动要用多少时间？

3．图11.4-8是两个单摆的振动图象。



**图11.4-8 两个单摆的振动图象**

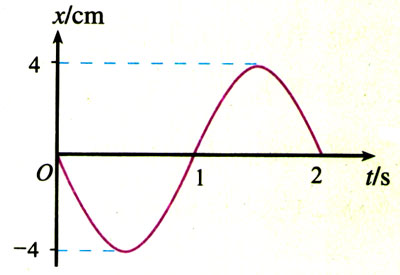
（1）甲、乙两个摆的摆长之比是多少？

（2）以向右的方向作为摆球偏离平衡位置的位移的正方向，从t-0起，乙第一次到达右方最大位移时，甲振动到了什么位置？向什么方向运动？

4．一条细线下面挂一个小球，让它自由摆动，作出它的振动图象如图11.4-9。问：

（1）你能根据图中的数据算出它的摆长吗？

（2）你能根据图中的数据估算它摆动的最大偏角吗？



**图11.4-9 一个单摆的振动图象**

1. 利用高等数学研究单摆的运动就会看到，该式是个近似公式，由它算出的周期与精确值之间的差别随着偏角的增加而增加。当偏角为5°时两者相差0.01%，7°时相差0.1%，15°时相差0.5%，23°时相差1%。 [↑](#footnote-ref-1)