# 第二章 2 简谐运动的描述

## 问题？

有些物体的振动可以近似为简谐运动，做简谐运动的物体在一个位置附近不断地重复同样的运动。如何描述简谐运动的这种独特性呢？



我们已经知道，做简谐运动的物体的位移 *x* 与运动时间 *t* 之间满足正弦函数关系，因此，位移 *x* 的一般函数表达式可写为

*x* = *A*sin（*ωt* + *φ*）

下面我们根据上述表达式，结合图2.2-1所示情景，分析简谐运动的特点。

图2.2-1 弹簧振子的简谐运动

## 振幅

因为 ∣sin（*ωt* + *φ*）∣ ≤ 1，所以 ∣*x*∣ ≤ *A*，这说明*A*是物体离开平衡位置的最大距离。

如图2.2-2，如果用 M 点和 M′ 点表示水平弹簧振子在平衡位置 O 点右端及左端最远位置，则 ∣OM∣ = ∣OM′∣ = *A*，我们把振动物体离开平衡位置的最大距离，叫作振动的**振幅**（amplitude）。振幅是表示振动幅度大小的物理量，常用字母 *A* 表示。振幅的单位是米。振动物体运动的范围是振幅的两倍。

图2.2-2 简谐运动的振幅

M′

O

P0

M

请大家复习高中数学的相关知识。

## 周期和频率

在图2.2-2中，如果从振动物体向右通过O的时刻开始计时，它将运动到M，然后向左回到 O，又继续向左运动到达 M′，之后又向右回到O。这样一个完整的振动过程称为一次全振动。做简谐运动的物体总是不断地重复着这样的运动过程，不管以哪里作为开始研究的起点。例如从图中的 P0 点开始研究，做简谐运动的物体完成一次全振动的时间总是相同的。

做简谐运动的物体完成一次全振动所需要的时间，叫作振动的**周期**（period）。周期的倒数叫作振动的**频率**（frequency），数值等于单位时间内完成全振动的次数。用 *T* 表示周期，用 *f* 表示频率，则有

*f* =

在国际单位制中，周期的单位是秒。频率的单位是**赫兹**（hertz），简称**赫**，符号是Hz。1 Hz=1 s-1 。

周期和频率都是表示物体振动快慢的物理量，周期越小，频率越大，表示振动越快。

描述任何周期性过程都要用到周期和频率这两个概念。实际上，它们的应用范围已经扩展到物理学以外的领域了。

根据正弦函数规律，（*ωt*＋*φ*）在每增加2π的过程中，函数值循环变化一次。这一变化过程所需要的时间便是简谐运动的周期*T*。

于是有 [*ω*（*t*＋*T*）＋*φ*] －（*ωt*＋*φ*）=2π

由此解出 *ω* =

根据周期与频率间的关系，则

*ω* = 2π *f*

可见，*ω* 是一个与周期成反比、与频率成正比的量，叫作简谐运动的“圆频率”。它也表示简谐运动的快慢。

### 做一做

**测量小球振动的周期**

如图 2.2-3，弹簧上端固定，下端悬挂钢球。把钢球从平衡位置向下拉一段距离 *A*，放手让其运动，*A* 就是振动的振幅。用停表测出钢球完成 *n* 个全振动所用的时间 *t*，就是振动的周期。*n* 的值取大一些可以减小测量误差。

*x*

*A*

*O*

图2.2-3 测量小球振动的周期

再把振幅减小为原来的一半，用同样的方法测量振动的周期。

通过这个实验你会发现，弹簧振子的振动周期与其振幅无关。不仅弹簧振子的简谐运动，所有简谐运动的周期均与其振幅无关。

## 相位

从 *x* = *A* sin（*ωt* + *φ*）可以发现，当（*ωt* + *φ*）确定时，sin（*ωt* + *φ*）的值也就确定了，所以（*ωt* + *φ*）代表了做简谐运动的物体此时正处于一个运动周期中的哪个状态。物理学中把（*ωt* + *φ*）叫作**相位**（phase）。*φ* 是 *t* = 0 时的相位，称作初相位，或初相。

实际上，经常用到的是两个具有相同频率的简谐运动的**相位差**（phase difference）。如果两个简谐运动的频率相同，其初相分别是 *φ*1 和 *φ*2 ，当*φ*1 ＞ *φ*2 时，它们的相位差是

Δ*φ* =（*ωt* + *φ*1 ） − （*ωt +* *φ*2 ） = *φ*1 − *φ*2

此时我们常说 1 的相位比 2 超前 Δ*φ*，或者说 2 的相位比 1 落后 Δ*φ*。

### 演示

**观察两个小球的振动情况**

并列悬挂两个相同的弹簧振子（图 2.2-4）。把小球向下拉同样的距离后同时放开，观察两球的振幅、周期、振动的步调。

*O*

图2.2-4 观察两小球的振动

再次把两个小球拉到相同的位置，先把第一个小球放开，再放开第二个，观察两球的振幅、周期、振动的步调。

通过观察我们会发现，两个小球同时释放时，除了振幅和周期都相同外，还总是向同一方向运动，同时经过平衡位置，并同时到达同一侧的最大位移处。在一个周期内，如果不同时释放小球，它们的步调就不一致。例如，自开始释放，当第一个小球到达平衡位置时再放开第二个，那么当第一个小球到达最高点时，第二个刚刚到达平衡位置；而当第二个小球到达最高点时，第一个已经返回平衡位置了。与第一个小球相比，第二个小球总是滞后 个周期，或者说总是滞后 个全振动。

上例中同时放开的两个小球振动步调总是一致，我们说它们的相位是相同的；而对于不同时放开的两个小球，我们说第二个小球的相位落后于第一个小球的相位。

根据一个简谐运动的振幅*A*、周期*T*、初相位*φ*0 ，可以知道做简谐运动的物体在任意时刻*t*的位移*x*是

*x* = *A*sin（*t* ＋ *φ*0 ）

所以，振幅、周期、初相位是描述简谐运动特征的物理量。

### 【例题】

如图 2.2-5，弹簧振子的平衡位置为 O 点，在 B、C两点之间做简谐运动。B、C 相距 20 cm。小球经过 B 点时开始计时，经过 0.5 s 首次到达 C 点。

图2.2-5

C

O

B

（1）画出小球在第一个周期内的 *x*-*t* 图像。

（2）求 5 s 内小球通过的路程及 5 s 末小球的位移。

**分析** 根据简谐运动的位移与时间的函数关系，可以画出简谐运动的 *x*-*t* 图像。

要得到简谐运动的位移与时间的函数关系，就需要首先确定计时的起点，进而确定初相位。根据振幅、周期及初相位写出位移与时间的函数关系，画出图像。

我们也可以采用描点法来画出位移－时间图像。根据题意，可以确定计时起点的位移、通过平衡位置及最大位移处的时刻，在 *x*-*t* 图上描出这些特殊坐标点，根据正弦图像规律画出图像。

根据简谐运动的周期性，在一个周期内，小球的位移为 0，通过的路程为振幅的4 倍。据此，可以求出 5 s 内小球通过的路程及 5 s 末小球的位移。

**解** （1）以 O 点作为坐标原点，沿 OB 建立坐标轴，如图 2.2-5。以小球从 B 点开始运动的时刻作为计时起点，用正弦函数来表示小球的位移－时间关系，则函数的初相位为 。

由于小球从最右端的 B 点运动到最左端的 C 点所用时间为 0.5 s，所以振动的周期 *T* = 1.0 s；由于B点和C点之间的距离为 0.2 m，所以，振动的振幅 *A* = 0.1 m。

根据 *x* = *A*sin（ *t* ＋ *φ*0 ），可得小球的位移－时间关系为

*x* = 0.1sin（2π*t* ＋ ）m

据此，可以画出小球在第一个周期内的位移－时间图像，如图 2.2-6 所示。

图2.2-6

0.1

0

−0.1

*x*/m

0.25

0.50

0.75

1.00

*t*/s

（2）由于振动的周期 *T* = 1 s，所以在时间 *t* = 5 s 内，小球一共做了*n* = = 5次全振动。小球在一次全振动中通过的路程为 4 *A* = 0.4 m，所以小球运动的路程为 *s* = 5×0.4 m = 2 m ；经过 5 次全振动后，小球正好回到 B 点，所以小球的位移为 0.1 m。

### 做一做

**用计算机呈现声音的振动图像**

绝大多数计算机都有录音、放音的功能，并能在放音时显示声振动的图像。

用计算机的录音功能录制两个乐音，例如笛声，一个是 do，另一个是 sol，把它们保存起来。用媒体播放软件显示这个声音，把播放软件界面中“条形与波浪”的选项设为“波形”。这样可以从电脑屏幕上看到播放声音时的振动图像。按下“暂停”键得到静止的图像。

把 do 和 sol 这两个声音的振动图像复制到同一张空白幻灯片上，并把图像以外多余的区域裁掉，就得到图 2.2-7 所示的图形。在屏幕上作出矩形框，调节框的宽度，使框内包含“do”的 10 个周期。在屏幕上观察，多少个“sol”的周期与“do”的 10 个周期的时间相等，由此可以得到“sol”和“do”的频率之比。如果已知其中一个声音的频率，还可以推知另一个声音的频率。

图2.2-7 比较两个声音的频率

请你想办法完成上面的操作。

## 科学漫步

**乐音和音阶**

在音乐理论中，把一组音按音调高低的次序排列起来就成为音阶，也就是大家都知道的do，re，mi，fa，sol，la，si，do（高）。下表列出了某乐律C调音阶中各音的频率。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 唱名 | do | re | mi | fa | sol | la | si | do（高） |
| 该唱名的频率与 do 的频率之比 | 1∶1 | 9∶8 | 5∶4 | 4∶3 | 3∶2 | 5∶3 | 15∶8 | 2∶1 |
| *f* / Hz（C 调） | 264 | 297 | 330 | 352 | 396 | 440 | 495 | 528 |

有趣的是，高音do的频率正好是中音do的2倍，而且音阶中各音的频率与do的频率之比都是整数之比。

还有更有趣的事情。喜欢音乐的同学都知道，有些音一起演奏时听起来好听，有些音一起演奏时听起来不好听，前者叫作谐和音，后者叫作不谐和音。著名的大三和弦do、mi、sol的频率比是4∶5∶6，而小三和弦re、fa、la的频率比是10∶12∶15。大三和弦听起来更为和谐，那是因为三个音的频率比是更小的整数之比。随便拼凑在一起的三个音听起来不和谐，有兴趣的同学可以算一算它们的频率比，一定是三个比较大的整数。

从这个例子可以看到艺术后面的科学道理，但是，艺术远比“1＋1=2”复杂。从上表中看出，频率增加一倍，音程高出8度。实际上这只对于中等音高是正确的。人的感觉十分复杂，对于高音段来说，频率要增加一倍多，听起来音高才高出一个8度。如果一个调音师按照“频率翻倍”的办法调钢琴，那就要出问题了。

尽管如此，科学家们还是可以通过音乐家的实际测听，确定音高与频率的对应关系，并且据此设计出优美动听的电子乐器。

## 练习与应用

本节共 5 道习题。第 1 题强调振动问题的多解性并考查了全振动问题。第 2 题和第 3 题求香相位差。第 4 题考查学生由振动情景得到简谐运动的位移-时间图像的能力。第 5 题考查学生由振动图像得到振动方程的能力，让学生在物理学习中体会用公式和图像描述同一物理过程的统一性。

1．一个小球在平衡位置 O 点附近做简谐运动，若从 O 点开始计时，经过 3 s 小球第一次经过 M 点，再继续运动，又经过 2 s 它第二次经过 M 点；求该小球做简谐运动的可能周期。

**参考解答**：如果小球由 O 点出发，向右运动，则小球运动的周期为 16 s；如果小球由 O 点出发向左运动，则小球运动的周期为 s。

提示：此题需分两种情况进行考虑，一种是自开始计时时。小球从 O 点出发，向右运动；另一种是向左运动。

2．有两个简谐运动：*x*1 = 3*a*sin（8π*bt* + ）和 *x*2 = 9*a*sin（8π*bt* + ），它们的振幅之比是多少？它们的频率各是多少？ *t* = 0 时它们的相位差是多少？

**参考解答**：振幅之比 = = ；频率分别为 *f*1 = = = 4*b*，*f*2 = = = 4*b*；相位差 Δ*φ* = *φ*2 – *φ*1 = − = ，即 2 的相位比 1 的相位超前 。

3．图 2.2-8 是两个简谐运动的振动图像，它们的相位差是多少？

0

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

*t*/s

*x*

甲

乙

图2.2-8

**参考解答**：Δ*φ* = ，实线代表的振动比虚线代表的振动相位超前 。

4．有甲、乙两个简谐运动：甲的振幅为 2 cm，乙的振幅为 3 cm，它们的周期都是 4 s，当 *t* = 0 时甲的位移为 2 cm，乙的相位比甲落后 。请在同一坐标系中画出这两个简谐运动的位移—时间图像。

**参考解答**：依题可分别写出甲、乙 2 个简谐运动中 *x* 随 *t* 变化的关系式。

甲：*x* = 2sin（*t* + ）

乙：*x* = 3sin（*t* + ）

由公式可得这两个简谐运动的位移-时间图像如图 2-1 所示。

缺图

5．图 2.2-9 为甲、乙两个简谐运动的振动图像。请根据图像写出这两个简谐运动的位移随时间变化的关系式。

0

*t*/s

*x*/cm

0.5

−0.5

0.5

1.0

乙

甲

图2.2-9

**参考解答**：依教材图 2.2-9 可分别写出甲、乙两个简谐运动的位移 *x* 随时间 *t* 变化的关系式。

甲：*x* = 0.5sin（5π*t* + π）

乙：*x* = 0.2sin（2.5π*t* + ）