# 第42届全国中学生物理竞赛预赛试题

（2025年9月6日9：00-12：00）

考生须知

**1．考生考试前务必认真阅读本须知。**

**2．本试题共4页，总分为400分。**

**3．需要阅卷老师评阅的内容必须要写在答题纸上相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容；选择题和填空题也必须在答题纸上作答；写在试题纸和草稿纸上的解答都不能给分。**

## **一、选择题（本题60分，共5小题，每小题12分。在每小题给出的4个选项中，有的小题只有一项符合题意，有的小题有多项符合题意。将符合题意的选项前面的英文字母写在答题纸上相应小题题号后面的括号内。全部选对的给12分，选对但不全的给6分，有选错或不答的给0分。）**

1. 一顶端开口、竖直放置的大口径圆柱体内装有一定高度的理想流体，圆柱体底部有一小孔。若将流体的高度增加为原来的4倍，则流体完全流完的时间为原来的（ ）倍。

A．1 B．2 C．4 D．8

1. 一理想气体系统经历一循环过程a→b→c→d→e→a，其*p*–*V*图如图所示。该循环过程中，系统对外做功以及吸、放热情况分别是（ ）

*p*

*V*

*O*

*a*

*b*

*e*

*d*

*c*

A．正功，吸热 B．负功，放热

C．正功，放热 D．负功，吸热

1. 一带正电荷的粒子以某一初速度进入匀强电场中。忽略重力影响，为了使粒子的速度方向在最短的时间内发生的偏转，则电场方向与粒子的初速度方向之间的夹角是（ ）

A． B． C． D．

1. 1953年诺贝尔物理学奖授予荷兰科学家弗里茨·泽尔尼克，以表彰他提出相衬显微技术。该技术可清晰分辨两种折射率相近的透明介质。现考虑一束光线经过含有细胞的培养液，产生三种不同光线1、2和3，其中光线3穿过细胞，光线2经过细胞边缘附近，光线1和2相干，光线2和3相干，如图所示。已知培养液的折射率为*n*0，细胞的折射率为*n*（*n* > *n*0）。由于边缘效应，光线2在培养液中的光程相对于光线1的增加了*n*0（*λ*为光线在培养液中的波长）；为增大细胞和培养液的对比度，在所有光线穿出培养液后，再通过相位补偿板使光线2又额外增加了*n*0的等效光程。假设细胞的等效厚度为*d*，若通过目镜观测到光线1和2的干涉条纹为暗条纹，光线2和3的干涉条纹为亮条纹，则细胞的折射率可能为（ ）

目镜

相位补偿板

细胞

1

2

3

培养液

*n*

*d*

*n*0

A．*n*0 + B．*n*0 + C．*n*0 D．*n*0

1. 原子核外只有一个电子的离子，称为类氢离子，其电子的能级可以用玻尔理论类比于氢原子推出。He+是典型的类氢离子。He+静止时，其电子从能级*n* = 3跃迁至能级*n* = 2发射出的光子能量记为*E*He+。He+朝向静止的氢原子高速运动的速度达到某个临界值*u*c时，上述跃迁发射出的光子刚好可以电离处于基态的氢原子。基态氢原子电离能为13.6 eV。已知光源朝向接收器高速运动时，接收器测得的光子频率*ν*ʹ与光源发出的光子频率*ν*存在如下关系：*v*ʹ = *v*（*c*为真空中的光速，*u*为相对运动速率）。以下表述正确的是（ ）

A．*E*He+ = 1.89 eV B．*E*He+ = 7.56 eV C．*u*c = 0.29*c* D．*u*c = 0.53*c*

## 二、填空题（本题100分，共5小题，每小题20分，每空10分。把答案填在答题纸相应题号后面的下横线上。只需给出结果，不要写出求得结果的过程。）

1. 如图所示，平行金属长直导轨与水平面成*θ*角并固定，两导轨之间的距离为*L*，导轨用导线与固定电阻R1、R2相连，匀强磁场垂直穿过导轨平面，磁感应强度大小为*B*。一质量为*m*的导体棒ab置于导轨上，它与导轨间的动摩擦因数为*μ*；导体棒接入电路部分的电阻与R1、R2的阻值均为*R*。棒在从静止开始沿导轨向下滑动的过程中，始终与导轨垂直并密接，其最终速度为\_\_\_\_\_\_\_\_\_，棒达到最终速度时整个装置消耗的机械功率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_。已知重力加速度大小为*g*，不计导轨和导线的电阻。

*B*

a

b

*θ*

R1

R2

1. 如图所示，三个质量均为*m*的质点由三根长度均为*l*的轻质细杆相连，组成一个位于竖直平面内的△OAB，此系统可绕过O点且垂直于△OAB的轴转动，C为△OAB的中心。初始时OC水平静止。系统在重力作用下，OC从水平位置转到竖直位置时，质点A的速度大小为\_\_\_\_\_\_\_\_\_，O点的支持力大小为\_\_\_\_\_\_\_\_\_。已知重力加速度大小为*g*，不计摩擦。

A

B

C

O

1. 近地卫星入轨时，对入轨角度的要求极高。假设原计划卫星处于一个圆轨道。若卫星入轨时其速度方向相对圆轨道的切线方向有一小偏角*θ*，则会导致其轨道偏离圆轨道，而变成一个椭圆轨道。此小偏角可能导致其近地点过低，影响卫星正常工作。现欲发射一圆轨道人造卫星，其轨道高度为300 km，卫星准确入轨后的运行速率应是\_\_\_\_\_\_\_\_\_km/s。假设该卫星实际入轨时速度大小仍为原设计的值，但速度方向在圆轨道所在平面内有1°的偏离，该卫星的近地点高度为\_\_\_\_\_\_\_\_\_km。已知地球半径为6 400 km，重力加速度大小为9.8 m/s2，不考虑空气阻力。
2. 冷藏泡沫塑料箱通常用于日常保温。现有一封闭泡沫箱内壁总面积为0.80 m2，壁厚为2.0 cm，内部放满水、足量的冰块和一瓶可乐，并整体处于0℃，箱外温度为30℃。泡沫塑料箱的热导率为0.020 W/(m·K)，冰的熔化热为3.34×105 J/kg。传入泡沫箱的热传导功率是\_\_\_\_\_W，在一天内融化的冰为\_\_\_\_\_kg。（已知单位时间内通过导热层由高温处传导到低温处的热量*H* = *kS*，其中*k*、*d*和*S*分别为导热层的热导率、厚度和横截面积，Δ*T*为导热层两侧的温度差。）
3. 自然界铀矿中的铀主要有两种同位素：235U和238U，其它同位素含量极少，可忽略。前者半衰期约为7.0亿年，后者半衰期约为45亿年，235U在自然界铀元素中所占的原子数百分比称为占比，其现代值为0.72%，由此推断出20亿年前铀矿的235U占比为\_\_\_\_\_\_\_\_\_%。许多放射性核素并非一次衰变后就稳定，而是经过多次衰变，最后生成稳定核素，这个过程称为级联衰变。一个235U核经历数次α衰变、β衰变和γ衰变，最后生成的稳定核素为207Pb，问其间所经历的α衰变为\_\_\_\_\_\_\_\_\_次。不计铀元素与任何其他元素之间的转化。

## 三、计算题（本题240分，共6小题，每小题40分。计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写最后结果的不给分。有数值计算的，答案中必须明确写出数值，有单位的必须写出单位。）

1. 如图（a）所示，三种透明介质1、2和3的交界面为相互平行的无限大平面，两平面之间的距离为*d*；介质1、2的折射率分别为*n*1、*n*2。一束单色光自介质1入射到介质1、2的交界面上的A点。

1

2

3

A

*d*

图（a）

（1）当光线在A点的反射光线和折射光线相互垂直时，其折射光线到达介质2、3的交界面上刚好能发生全反射。求介质3的折射率*n*3。

（2）如图（b）所示，一束波长为*λ*（*λ*为真空中的波长）的单色光以某一初始入射角入射到介质1、2的交界面，反射光为光线a，经介质2、3交界面上的B点反射后再经介质1、2交界面上的C点折射后的出射光为光线b；两光线a和b经凸透镜汇聚后在其焦平面上发生干涉，观察到第一级亮条纹。假设*n*1 > *n*2，求初始入射角。

1

2

3

*d*

图（b）

A

B

C

a

b

1. 空间中存在恒定的匀强电场和匀强磁场，其电场强度***E*** = *E****i***，磁感应强度***B*** = *B*(***i*** + ***j***)，*E*和*B*分别表示电场强度和磁感应强度的大小，这里***i***、***j***和***k***分别表示坐标轴*x、y*和*z*方向的单位矢量，坐标原点记为*O*，如图所示（*z*轴未画出）。不计重力。考虑此空间中一个质量为*m、*带正电荷*q*的粒子。

***B***

***E***

*O*

*y*

*x*

（1）试选择合适的新坐标系*O*–*x*’*y*’*z*，使得粒子所受到的磁场力在新坐标系的某基矢方向为零；列出在此坐标系中粒子的运动方程，并证明粒子沿磁场方向的运动和垂直于磁场方向的运动相互独立。

（2）若将粒子从*O*点在*t* = 0时刻由静止释放，P为此后该粒子运动轨迹上的一点，其*x*坐标和*y*坐标之和为*c*，计算该粒子由*O*点运动到P点所用的时间。

（3）若将粒子从*O*点在*t* = 0时刻由静止释放，Pʹ为此后该粒子运动轨迹上的一点，其*x*坐标和*y*坐标之差为*c*’，计算该粒子在Pʹ点所受的磁场力的大小。

（4）若将粒子从*O*点在*t* = 0时刻以某一非零初速率*v*0沿某一特定方向释放，发现该粒子的运动轨迹始终处在同一个平面内。计算该粒子在时刻*t*的位置(*x*(*t)*,*y*(*t*),*z*(*t*))。

1. 如图所示，一滑块（可视为质点）以初速度*v*0沿光滑水平地面向右运动，滑块右方有一倾角为*θ*的光滑斜面（斜面足够长）处于静止状态，斜面与地面光滑接触，其交线过地面O点。滑块遇到斜面后能继续沿斜面向上运动。已知滑块和斜面的质量分别为*m*和*M*，重力加速度大小为*g*。求

*v*0

*θ*

O

（1）滑块上升至最高点时离地面的高度和速度大小；

（2）滑块在斜面上升高至离地面高度*h*处时，斜面的速度大小和滑块相对于斜面的速度大小；

（3）滑块从O点运动到最高点所需时间，此过程中斜面运动的加速度和滑块相对于斜面运动的加速度。

1. 如图所示，光滑水平地面上方有匀强电场，其场强方向水平向右，大小*E* = 100 V/m；地面上一质量*m*1 = 0.010 kg的小物块a与一水平轻质弹簧相连，弹簧的另一端固定在竖直墙面上，弹簧的劲度系数*k* = 0.16 N/m。将弹簧处于原长时a的位置记为原点*O*，水平向右记为*x*正方向。将物块a从原点左移4.0 m后由静止释放，以释放时刻为计时起点*t* = 0。此时，另一质量*m*2 = 0.030 kg、电荷量*q* = + 1.6×10−3 C的小物块b，以大小为 16.7 m/s的速度*v*0向左运动，经过s与a发生完全非弹性碰撞，碰撞时间极短，碰后两物块组成新物块c。已知碰撞中没有电荷损失。求

*k*

*x*

*v*0

***E***

b

a

（1）碰撞前物块a在*t*（*t* ≥ 0）时刻的坐标*x*a(*t*)和速度*v*a(*t*)；

（2）物块c在*t*时刻的坐标*x*c(*t*)。

1. 半径为*a*、单位长度匝数为*n*的长直密绕螺线管中，通有随时间*t*变化的励磁电流*i*(*t*) = *I*0cos*ωt*，在*t* = 0时刻，磁场的方向垂直纸面向外。如图所示，一等腰梯形闭合回路ABCDA由均匀导线构成，其上底长为*a*，下底长为2*a*，导线总电阻为*R*；梯形回路平面在螺线管的横截面内，A、D两点在螺线管区域的边缘。

O

A

D

B

C

*a*

（1）求梯形各边上的感应电动势，以及整个回路中的感应电动势；

（2）求B、C两点间的电势差和CD段消耗的平均功率；

（3）若在梯形回路的A、D两点间沿圆弧$\overparen{AD}$也接入同样导线，那么通过直导线段AD的电流是多大？

闭合回路和圆弧导线均不与螺线管的导线连通。已知真空磁导率为*μ*0。

1. 太空中有一没有大气的球形行星，该行星有一沿圆形轨道运行的小卫星，其质量*m* = 1.00×103 kg，运行周期*T* = 258.4 min。此卫星运行至轨道上的A点时，瞬间分裂成沿原速度方向的两块P和Q，P在前，Q在后。在分裂后的瞬间，P相对Q的速度*u* = 3.00×103 m/s。此后，Q沿着紧贴行星表面的B点的轨道运行（Q不与行星表面接触）。已知行星半径*R* = 7.00×106 m，行星表面的“重力加速度”*g*0 = 11.3 m/s2。

（1）求卫星分裂前的运行速率及距行星表面的高度；

（2）求P、Q的质量及Q到达B点时的速率；

（3）Q从B点飞出后还能成为该行星的卫星吗？若能，求出Q的运动周期；若不能，写出Q的轨迹方程。

# 第42届全国中学生物理竞赛预赛试题解答及评分标准

（2025年9月6日9：00-12：00）

## **一、选择题（本题60分，共5小题，每小题12分。在每小题给出的4个选项中，有的小题只有一项符合题意，有的小题有多项符合题意。将符合题意的选项前面的英文字母写在答题纸上相应小题题号后面的括号内。全部选对的给12分，选对但不全的给6分，有选错或不答的给0分。）**

1．B 2．A 3．A 4．D 5．BD

## 二、填空题（本题100分，共5小题，每小题20分，每空10分。把答案填在答题纸相应题号后面的下横线上。只需给出结果，不要写出求得结果的过程。）

6．3*Rmg*，3*R*（*mg*）2sin*θ*

7．，6*mg*

8．7.7，1.8×102

9．24，6.2

10．3.7，7

## 三、计算题（本题240分，共6小题，每小题40分。计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写最后结果的不给分。有数值计算的，答案中必须明确写出数值，有单位的必须写出单位。

11．（1）对于入射到介质1、2的交界面上的A点的光线，令入射角为*i*A，反射角为*r*A，折射角为*t*A，如题解图a所示。由折射定律得

$n\_{1}sini\_{Λ}=n\_{2}sint\_{Λ}$ ①

由反射定律得

*i*A = *r*A ②

由题设，光线在A点的反射光线和折射光线相互垂直，即

$i\_{Λ}+t\_{Λ}=\frac{π}{2}$ ③

折射光线到达介质2、3的交界面上的B点，令入射角为*i*B，反射角为*r*B，折射角为*t*B，同样有

$n\_{2}sini\_{B}=n\_{3}sint\_{B}$ ④

*i*B = *r*B ⑤

由题给条件，折射光线在B点刚好能发生全反射，因而

$t\_{B}=\frac{π}{2}$ ⑥

由几何关系得

*i*B = *r*A ⑦

由④⑤⑥⑦式得

$n\_{2}sint\_{A}=n\_{3}$ ⑧

由①②③式得

$\frac{sint\_{A}}{cost\_{A}}=\frac{n\_{1}}{n\_{2}}$ ⑨

由⑨式得

$sint\_{A}=\frac{n\_{1}}{\sqrt{n\_{1}^{2}+n\_{2}^{2}}}$ ⑩

由⑧⑩式得

*n*3 = ⑪

（2）如题解图b，以某一初始入射角*i*Aʹ入射到介质1、2的交界面上的A点，折射角为*t*Aʹ。注意，此时限制条件③⑥不一定满足。但⑪式不受入射角的取值的影响，仍成立，因而有

*n*3 = < *n*2 ⑫

可见，光线在介质2中入射到介质2、3的交界面上反射时，不会发生半波损失。\*

同理，由于

*n*1 > *n*2 ⑬

光线在介质1中入射到介质1、2的交界面上反射时，也不会发生半波损失。\*\*

A点的折射光线经介质2、3交界面上的B点反射后，再经介质1、2交界面上的C点折射。光线在A、B和C三点入射角、反射角、折射角分别以（1）中类似记号打撇号表示，它们满足相应的折射定律公式与反射定律公式以及几何关系。

由于介质1、2的交界面和介质2、3交界面相互平行，在介质1中光线a和b也相互平行。在介质1中自C点向光线a作垂线交光线a于D点。由几何关系可知

∠ACD = *i*Aʹ ⑭

经凸透镜汇聚后在其焦平面的光线a和b的光程差为

$Δl\_{ba}=2×n\_{2}×AB-n\_{1}×2×\frac{AC}{2}×sini\_{A}^{'}$ ⑮

利用⑭⑮式、折射定律、反射定律和几何关系得

$Δl\_{ba}=2n\_{2}\frac{d}{cost\_{A}^{'}}-2n\_{1}d\frac{sint\_{A}^{'}}{cost\_{A}^{'}}sini\_{A}^{'}$ ⑯

利用①式，⑯式可化简为

$Δl\_{ba}=2dn\_{2}cost\_{Λ}^{'}$ ⑰

a和b经凸透镜汇聚后在其焦平面上发生干涉，观察到第一级亮条纹，因而

$Δl\_{ba}=λ$ ⑱

由⑰⑱式得

$λ=2dn\_{2}cost\_{Λ}^{'}$ ⑲

由①⑲式得

$λ^{2}=4d^{2}n\_{2}^{2}\left(1-\frac{n\_{1}^{2}}{n\_{2}^{2}}sin^{2}i\_{Λ}^{'}\right)$ ⑳

此即

*i*Aʹ = arcsin ㉑

评分标准：本题40分

第（1）问20分，①式3分，②式2分，③式1分，④⑤式各2分，⑥⑦式各1分，⑧式2分⑨式1分，⑩式3分，⑪式2分；

第（2）问20分，⑫式2分，\*1分，\*\*1分，⑭式2分，⑮式3分，⑯⑰⑱式各2分，⑲式1分，⑳㉑式各2分。

12．

（1）在*x*–*y*平面内将原坐标系*S*绕*z*轴沿顺指针方向旋转45°，形成新的坐标系*S*ʹ，如题解图12a所示，新坐标系*S*ʹ中的基矢***i***ʹ、***j***ʹ为

$i'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i-j\right), j'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)$ \*2ʹ

这里，***j***ʹ沿磁场方向，***i***ʹ垂直于磁场方向。将电场分解为沿着磁场方向的电场

$E\_{j}=E\_{j}j^{'}=\frac{E}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)$ ①

和垂直磁场方向的电场

$E\_{i}=E\_{r}i^{'}=\frac{E}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i-j\right)$ ②

磁感应强度仅在***j***ʹ方向不为零，有

$B\_{j}=Bj^{'}=B\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)$ ③

设*t*时刻在新坐标系中粒子的速度和加速度分别为

$$v\_{jʹ}=\left(v\_{iʹ},v\_{jʹ},v\_{k}\right), a\_{jʹ}=\left(a\_{iʹ},a\_{jʹ},a\_{k}\right)$$

粒子受到电场力和磁场力的作用，按牛顿第二定律（并利用①②式）得

$q\left(E\_{iʹ}-v\_{k}B\right)=ma\_{iʹ} （即 q\left(\frac{E}{\sqrt{2}}-v\_{k}B\right)=ma\_{iʹ}）$ ④

$qE\_{jʹ}=ma\_{jʹ} （即 q\frac{E}{\sqrt{2}}=ma\_{jʹ}）$ ⑤

$qv\_{i}B=ma\_{k}$ ⑥

值得注意的是，运动方程⑤只与沿磁场方向的物理量有关，而方程④和⑥只与垂直于磁场方向的物理量有关。因此，粒子的运动可分解为沿磁场方向的运动和垂直于磁场方向的运动，这两个运动相互独立。\*\*

（2）沿着磁场方向***j***ʹ，粒子仅受到静电力作用

$$F\_{jʹ}=qE\_{jʹ}=q\frac{E}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)$$

粒子沿磁场方向做匀加速运动，由⑤式得

$a\_{jʹ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{qE}{m}$ ⑦

设P点的*x*坐标和*y*坐标分别为*a*和*b*。粒子从坐标原点运动到P，沿磁场方向的位移大小为

$d\_{jʹ}=\left(ai+bj\right)⋅\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+b\right)$ ⑧

设粒子从坐标原点运动到P(*a*,*b*)的时间为*t*，按匀加速运动学公式有

$d\_{jʹ}=\frac{1}{2}a\_{jʹ}t^{2}$ ⑨

由⑦⑧⑨式和题给数据得

*t* = =

（3）在垂直于磁场的平面内，粒子受到磁场的作用力以及由②式所示的电场对它的作用力

$F\_{iʹ}=qE\_{iʹ}=q\frac{E}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i-j\right)$ ⑩

设Pʹ点的*x*坐标和*y*坐标分别为*a*ʹ和*b*ʹ。粒子从坐标原点运动到Pʹ，电场力***F****i*ʹ对它做的功为

$W\_{iʹ}=F\_{iʹ}⋅\left(a^{'}i+b^{'}j\right)$ ⑪

磁场力不做功。根据功能原理，粒子在Pʹ点时它在垂直磁场的平面内运动的速度大小*vi*ʹ满足

$W\_{iʹ}=\frac{1}{2}mv\_{iʹ}^{2}-0$ ⑫

粒子在Pʹ点时磁场对该粒子的作用力的大小为

$f=qv\_{iʹ}B$ ⑬

联立②⑩⑪⑫⑬式和题给数据得

*f* = *qB*= *qB* ⑭

（4）已知粒子的运动轨迹始终在同一个平面内。由运动方程⑤式可知，

$a\_{jʹ}\ne 0$ ⑮

从而

$v\_{jʹ}\ne 0$ ⑯

粒子要保持在同一个平面内运动，需要且仅需要在垂直于磁场的平面内的某一固定方向$n$ 上粒子的运动速度是不为零的矢量，而在垂直于***n***的方向上恒为零。设***n***与***i***ʹ的夹角为*θ*，有

$$v\_{iʹ}sinθ-v\_{k}cosθ=0$$

由此得

$$a\_{iʹ}sinθ-a\_{k}cosθ=0$$

由④⑥式及上式得

$$qE\_{iʹ}sinθ-qB\left(v\_{iʹ}cosθ+v\_{k}sinθ\right)=m\left(a\_{iʹ}sinθ-a\_{k}cosθ\right)=0$$

此即

$$v\_{iʹ}cosθ+v\_{k}sinθ=\frac{E\_{iʹ}}{B}sinθ=const$$

由此得

$$a\_{iʹ}cosθ+a\_{k}sinθ=0$$

于是

$a\_{iʹ}=0 a\_{k}=0$ ⑰

从而由④⑥式

$v\_{iʹ}=0, v\_{k}=\frac{E\_{iʹ}}{B}=const\ne 0$ ⑱

粒子在*z*方向做匀速运动。

设初始时刻粒子沿着*z*方向运动的速度为*v*0*k*，刚释放粒子时它沿着磁场方向的速度*v*0*j*$ʹ$满足

$v\_{0jʹ}^{2}=v\_{0}^{2}-v\_{0k}^{2}$ ⑲

粒子沿磁场方向做匀变速运动，在***k***方向做匀速运动，所以它在*t*时刻的位移矢量

$r=\left(v\_{0jʹ}t+\frac{1}{2}a\_{0jʹ}t^{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)+v\_{0k}tk$⑳

联立②⑦⑱⑲⑳式得

$r=\left(\pm \sqrt{v\_{0}^{2}-\frac{E^{2}}{2B^{2}}}t+\frac{1}{2}\frac{qE}{\sqrt{2}m}t^{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i+j\right)+\frac{E}{\sqrt{2}B}tk$㉑

此即

*x* = ±*t* +*t*2 ㉒

*y* = ±*t* +*t*2 ㉓

*z* = *t* ㉔

评分标准：本题40分。

第（1）问12分，\*2分，①②式各1分，④⑤⑥式各2分，\*\*2分：

第（2）问7分，⑦式1分，⑧⑨⑩式各2分；

第（3）问8分，⑪⑫⑬⑭式各2分；

第（4）问13分，⑮⑯式各1分，⑰⑱⑲⑳式各2分，式各1分。

13．

（1）滑块与斜面达到共同速度时，滑块到达最高点。设此时斜面的速度大小和滑块上升的高度分别为*V*max和*h*max。对于滑块与斜面构成的体系，有能量守恒

$\frac{1}{2}mv\_{0}^{2}=\frac{1}{2}\left(M+m\right)V\_{max}^{2}+mgh\_{max}$ ①

以及水平方向上动量守恒

$mv\_{0}=\left(M+m\right)V\_{max}$ ②

由①②式得

*V*amx = *v*0 ③

*h*max = ④

（2）设滑块上升至离地面高度*h*（0 ≤ *h* < *h*max）处时，斜面的速度为***V***h，滑块的速度为***v***h，滑块相对于斜面的速度为***v***Rh = ***v***h − ***V***h，相应的速度大小分别为*V*h、*v*h和*v*Rh。矢量***V***h、***v***h和***v***Rh组成一个三角形，由题意知，***v***Rh相对于***V***h的偏角为*θ*。由余弦定理有

$v\_{h}^{2}=V\_{h}^{2}+v\_{Rh}^{2}+2V\_{h}v\_{Rh}cosθ$ ⑤

对于滑块和斜面构成的体系，有能量守恒

$\frac{1}{2}mv\_{0}^{2}=\frac{1}{2}MV\_{h}^{2}+\frac{1}{2}mv\_{h}^{2}+mgh$ ⑥

以及水平方向上动量守恒

$mv\_{0}=MV\_{h}+m\left(V\_{h}+v\_{Rh}cosθ\right)$ ⑦

由⑤⑥⑦式有

$\left(\frac{V\_{h}}{v\_{0}}\right)^{2}-2\frac{m}{M+m}\left(\frac{V\_{h}}{v\_{0}}\right)+\left(\frac{sin^{2}θ}{cos^{2}θ}+\frac{2gh}{v\_{0}^{2}}\right)\frac{m}{M+m}\frac{mcos^{2}θ}{M+msin^{2}θ}=0$ ⑧

解得

*V*h = *v*0 ⑨

由于③式的限制，⑨式根号前取了负号。由⑦⑨式得

*v*Rh = ⑩

（3）由⑩式得

$v\_{Rh}|\_{h=0}=\sqrt{\frac{M}{M+msin^{2}θ}}v\_{0}$ ⑪

$v\_{Rh\_{max}}=0$ ⑫

⑫式是显然成立的。斜面和滑块各受恒力作用，均做匀加速运动。滑块相对于斜面运动的平均速度为

$\overline{v}\_{Rh}=\frac{v\_{Rh}|\_{h=0}+v\_{Rh\_{max}}}{2}=\frac{v\_{Rh}|\_{h=0}}{2}$ ⑬

由④⑫⑬式得，滑块从0点开始运动到最高点的时间为

$t=\frac{\frac{h\_{max}}{sinθ}}{\overline{v}\_{Rh}}=\frac{\sqrt{M\left(M+msin^{2}θ\right)}}{M+m}\frac{v\_{0}}{gsinθ}$ ⑭

由$⑪$⑫⑭式得，滑块相对于斜面的加速度为

*a*Rh = = − *g* ⑮

式中负号表示滑块加速度方向沿斜面向下。由⑦⑮式得，斜面的加速度为

*a*h = − *a*Rh= *g* ⑯

式中正号表示斜面加速度方向向右。

[解法（二）

由⑩式得

$v\_{Rh}|\_{h=0}=\sqrt{\frac{M}{M+msin^{2}θ}}v\_{0}$ ⑪ʹ

$v\_{Rh}^{2}=(\sqrt{\frac{M}{M+msin^{2}θ}}v\_{0})^{2}-2\left[\frac{\left(M+m\right)sinθ}{M+msin^{2}θ}g\right]\left(\frac{h}{sinθ}\right)$ ⑫ʹ

由⑪⑫式得

$v\_{Rh}^{2}=\left(v\_{Rh}|\_{h=0}\right)^{2}-2\left[\frac{\left(M+m\right)sinθ}{M+msin^{2}θ}g\right]\left(\frac{h}{sinθ}\right)$ ⑬ʹ

可见，滑块在斜面上相对于斜面做匀加速运动。滑块相对于斜面的加速度为

$a\_{Rh}=-\frac{\left(M+m\right)sinθ}{M+msin^{2}θ}g$ ⑭ʹ

式中负号表示滑块加速度方向沿斜面向下。由⑦⑮式得，斜面的加速度为

$a\_{h}=-a\_{Rh}\frac{mcosθ}{M+m}=\frac{msinθcosθ}{M+msin^{2}θ}g$ ⑮

式中正号表示斜面加速度方向向右。由$v\_{Rh\_{max}}$= 0、⑪ʹ⑭ʹ及匀加速运动公式得，滑块从0点开始运动到最高点的时间为

$t=\frac{v\_{Rh}|\_{h=max}-v\_{Rh}|\_{h=0}}{a\_{Rh}}=\frac{\sqrt{M\left(M+msin^{2}θ\right)}}{M+m}\frac{v\_{0}}{gsinθ}$ ⑯

评分标准：本题40分。

第（1）问10分，\*2分，①②③④各2分：

第（2）问15分，⑤⑥⑦各3分，⑧⑨⑩各2分；

第（3）问15分，⑪⑫⑬各2分，⑭⑮⑯式各3分。

14．

（1）振子a做简谐振动，设其振幅为*A*，圆频率为*ω*，初相为*φ*，则a相对于原点*O*的位移*x*可表示为

$x=Acos\left(ωt+φ\right)$ ①

从而a的速度*v*表示为

$v=-Aωsin\left(ωt+φ\right)$ ②

式中

$ω=\sqrt{\frac{k}{m\_{1}}}$ ③

将题给数据代入③式得

$ω=4.0s^{-1}$ ④

a从左边4 m处从静止释放，可得

$A=4.0m$ ⑤

$φ=π$ ⑥

将④⑤⑥式代入①②式得，在$t\in [0,\frac{π}{24}$s] 时有

$x=4.0cos\left(\frac{4.0}{s}t+π\right)m=-4.0cos\left(\frac{4.0}{s}t\right)m$ ？？ ⑦

$v=16sin\left(\frac{4.0}{s}t\right)m/s$ ？？ ⑧

*x* = − 4.0cos（4.0*t*）m

*v* = 16sin（4.0*t*）m/s

（2）设从*t* = 0到碰撞时a的相位增加Δ*φ*，则有

$Δφ=ω\left(\frac{π}{24}s-0\right)=\frac{π}{6}$ ⑨

在碰撞前的瞬间，设a位于*x*1，速度为*v*1。将*t* = s代入⑦⑧式得

$x\_{1}=-2\sqrt{3}m$ ⑩

$v\_{1}=8.0m/s$ ⑪

物块b在电场力作用下做匀变速运动，在碰撞前的瞬间，其速度为

$v\_{2}=v\_{0}+\frac{Eq}{m\_{2}}\frac{π}{24}s=-16 m/s$ ⑫

在碰撞后的瞬间，设c的速度为*v*3ʹ，因碰撞时间极短，故动量守恒，

$m\_{1}v\_{1}+m\_{2}v\_{2}=\left(m\_{1}+m\_{2}\right)v\_{3}^{'}$ ⑬

由⑪⑫⑬式和题给数据得

$v\_{3}^{'}=-10 m⋅s^{-1}$ ⑭

弹簧和c构成新振子。设新振子的圆频率为*ω*ʹ，可得

$ω'=\sqrt{\frac{k}{m\_{1}+m\_{2}}}$ ⑮

由5式和题给数据得

$ω'=2.0 s^{-1}$ ⑯

新振子受到的合力为

$F=-kx+Eq$ ⑰

系统处于新的平衡位置时*F* = 0，设此时弹簧伸长量为$x\_{2}$ ，有

$Eq=kx\_{2}$ ⑰

由⑰式和题给数据得

$x\_{2}=1.0 m$ ⑱

若以新的平衡位置为坐标原点*O*ʹ，设此时c的坐标为*x*3ʹ，则由⑩⑱式得

$x\_{3}'=x\_{1}-x\_{2}=-\left(2\sqrt{3}+1.0\right)m$ ⑲

设c的振幅为*A*ʹ，初相位为*φ*ʹ，相对于*O*ʹ的位移可表示为

$x'=A'cos\left(ω't'+φ'\right)$ ⑳

从而c的速度*v*ʹ表示为

$v'=-A'ω'sin\left(ω't'+φ'\right)$ ㉑

c在振动的过程中能量守恒，故

$\frac{1}{2}kA'^{2}=\frac{1}{2}kx\_{3}'^{2}+\frac{1}{2}\left(m\_{1}+m\_{2}\right)v\_{3}'^{2}$ ㉒

解得

$A'=\sqrt{x\_{3}'^{2}+\frac{v\_{3}'^{2}}{\frac{k}{m\_{1}+m\_{2}}}}=\sqrt{x\_{3}'^{2}+\frac{v\_{3}'^{2}}{ω'^{2}}}$ ㉓

已利用了⑮式。*t* = s为新振子的计时零点*t*ʹ = 0，故

$t'=t-\frac{π}{24}s$ ㉔

在⑳㉑式中取*t*ʹ = 0得

*x*3ʹ = *A*ʹcos*φ*ʹ ㉕

*v*3ʹ = − *A*ʹ*ω*ʹsin*φ*ʹ ㉖

由㉕㉖式得

$tanφ^{'}=\frac{-v\_{3}^{'}}{ω^{'}x\_{3}^{'}}$ ㉗

由⑭⑯⑲㉓㉗式有

$A'=6.7 m$ ㉘

$tanφ^{'}=-1.1$ ㉙

考虑到$x\_{3}^{'}<0$ $x\_{3}^{'}<0$ $x\_{3}^{'}<0$ $,v\_{3}^{'}<0$ ，有

$φ'=2.3$ ㉚

若以新的平衡位置为坐标原点，将⑮㉘㉙式代入简谐运动方程，有

$x'=6.7m cos\left[2\left(\frac{t}{s}-\frac{π}{24}\right)+2.3\right]$ ㉛

即

*x* = 6.7 m cos+ 1.0 m ？？ ㉜

*x* = 6.7cos[2(*t* − ) + 2.3] + 1.0 （m） ㉜

评分标准：本题40分，

第（1）问9分，①式1分，②式2分，③④式各1分，⑤⑥式各2分；

第（2）问31分，⑦式2分，⑧⑨⑩式各1分，⑪式3分，⑫式1分，⑬式3分，⑭⑮⑯式各1分⑰式3分，⑱⑲式各1分，⑳㉑式各2分，㉒㉓各1分，㉔㉕式各2分，㉖式1分。

15．

（1）取磁感应强度的正方向为垂直于纸面向外。圆形区域的磁场*B*(*t*)由螺线管的磁感应强度公式给出

*B*(*t*) = *μ*0*nI*0cos*ωt* ①

为方便起见，以下记$B\_{0}≡μ\_{0}nI\_{0}$。由对称性可知，径向的感应电动势为零。AB边和CD上的感应电动势$ε\_{AB}$和$ε\_{CD}$分别为

*ε*AB = 0 ②

*ε*CD = 0 ③

为求AD边上的感应电动势，取回路△OAD，这个回路上的电动势就是边AD上的电动势$ε\_{AD}$，由法拉第电磁感应定律有

$ε\_{AD}=-S\_{ΔOAD}\frac{dB\left(t\right)}{dt} $ ④

磁感应强度的变化率为

$\frac{dB\left(t\right)}{dt}=-B\_{0}ωsinωt$ ⑤

联立④⑤式得

*ε*AD = *a*2*μ*0*nI*0*ω*sin*ωt* ⑥

同理，为求BC边上的感应电动势，取回路△OBC。回路△OBC上的电动势是BC边上的感应电动势$ε\_{BC}$，回路三角形OBC和扇形OAD的磁通量相同，由法拉第电磁感应定律有

$ε\_{BC}=-S\_{扇形OAD}\frac{dB\left(t\right)}{dt}$ ⑦

联立⑤⑦式得

*ε*BC = *a*2*μ*0*nI*0*ω*sin*ωt* ⑧

对梯形回路，上面两电动势方向相反，因此回路总电动势*ε*为

$ε=ε\_{BC}-ε\_{AD}$ ⑨

联立：⑥⑦⑨式得

*ε* =（− ）*a*2*μ*0*nI*0*ω*sin*ωt* ⑩

（2）梯形各边AB、BC、CD、DA的电阻分别是

$$\frac{R}{5},\frac{2R}{5},\frac{R}{5},\frac{R}{5}$$

其等效电路如题解图15a所示。由安培定律，回路中的电流为

$i'=\frac{ε}{R}$ ⑪

联立⑩⑪式得

$i'=\frac{2π-3\sqrt{3}}{12R}a^{2}B\_{0}ωsinωt$ ⑫

BC两端的电势差为

*U*BC = *i*ʹ − *ε*BC ⑬

联立⑧⑫⑬式得

*U*BC = − *a*2*μ*0*nI*0*ω*sin*ωt* ⑭

通过CD段的电流有效值为

$I'=\frac{i'\_{max}}{\sqrt{2}}$ ⑮

CD段消耗的平均功率为

$‾\_{CD}=I^{'2}\frac{R}{5}$ ⑯

联立⑫⑮⑯式得

CD = *a*4*μ*02*n*2*I*02*ω*2 ⑰

（3）根据法拉第电磁感应定律，弧AD段的感应电动势为

$ε\_{AD}=-S\_{扇形OAD}\frac{dB\left(t\right)}{dt}$ ⑱

联立⑤⑱式得

$ε\_{AD}=\frac{π}{6}a^{2}B\_{0}ωsinωt$ ⑲

此外，可求得弧AD段的电阻为$\frac{πR}{15}$ ，则等效电路为题解图15b 所示。由基尔霍夫定律，可列出两回路方程

$I\_{1}\frac{π}{15}R+\left(I\_{1}+I\_{2}\right)\frac{R}{5}=ε\_{\overparen{AD}}-ε\_{AD}$ ⑳

$I\_{2}\frac{4}{5}R+\left(I\_{1}+I\_{2}\right)\frac{R}{5}=ε\_{BC}-ε\_{AD}$ ㉑

联立⑥⑨⑲⑳㉑式解得

*I*1 = ㉒

*I*2 = ㉓

通过DA段的电流为

$I=I\_{1}+I\_{2}$ ㉔

联立⑩㉒㉓㉔式得

*I* = *a*2*μ*0*nI*0*ω*sin*ωt* ㉕

评分标准：本题40分。

第（1）问15分，①式2分，②③式各1分，④式2分，⑤⑥式各1分，⑦式3分，⑧⑨式各1分， ⑩式2分（感应电动势的表达式相差一个正负号不扣分）；

第（2）问11分，⑪式2分，⑫式1分，⑬⑭式各2分，⑮⑯式各1分，⑰式2分；

第（3）问14分，⑱式2分，⑲式1分，⑳㉑式各3分，㉒㉓㉔式各1分，㉕式各2分。

16．

（1）设行星质量为*M*，卫星轨道半径为*r*，卫星离行星表面的高度为*h*，卫星在分裂前的速率为*v*A。根据万有引力定律和牛顿第二定律，有

$G\frac{Mm}{r^{2}}=m(\frac{2π}{T})^{2}r$ ①

对行星表面质量为*m*ʹ的物体，根据万有引力定律有

$G\frac{Mm^{'}}{R^{2}}=m^{'}g\_{0}$ ②

根据圆周运动线速度和角速度关系有

$v\_{A}=\frac{2π}{T}r$ ③

由几何关系得

$r=R+h$ ④

联立①②③④式，可得

$r=\left(\frac{g\_{0}T^{2}R^{2}}{4π^{2}}\right)^{1/3}$ ⑤

$h=\left(\frac{g\_{0}T^{2}R^{2}}{4π^{2}}\right)^{1/3}-R$ ⑥

$v\_{A}=\left(\frac{2πg\_{0}R^{2}}{T}\right)^{1/3}$ ⑦

代入题给数据得

*h* = 8.00×106 m ⑧

*v*A = 6.08×103 m/s ⑨

（2）设卫星分裂后P、Q的速度分别为*v*1、*v*2，P、Q的质量分别为*m*1、*m*2，按题意，有

$m\_{2}=m-m\_{1}$ ⑩

$v\_{1}=v\_{2}+u$ ⑪

由于卫星分裂时间极短，故分裂前后动量守恒

$mv\_{A}=m\_{1}v\_{1}+m\_{2}v\_{2}$ ⑫

设Q运动到B点时的速率为*v*B。由于Q从A运动到B的过程中角动量守恒，机械能守恒，有

*m*2*v*2*r* = *m*2*v*B*R* ⑬

*m*2*v*22 – *G*= *m*2*v*B2 – *G* ⑭

联立⑩⑪⑫⑬⑭式并略去不合题意的解得

$m\_{1}=\frac{m}{u}\left(v\_{A}-\sqrt{\frac{2GmMR}{r\left(r+R\right)}}\right), m\_{2}=m-\frac{m}{u}\left(v\_{A}-\sqrt{\frac{2GmMR}{r\left(r+R\right)}}\right) $ ⑮

$v\_{1}=\sqrt{\frac{2GmMR}{r\left(r+R\right)}}+u$ ⑯

$v\_{2}=\sqrt{\frac{2GmMR}{r\left(r+R\right)}}$ ⑰

$v\_{B}=\sqrt{\frac{2GmMr}{R\left(r+R\right)}}$ ⑱

由②⑤⑦⑮⑱式及题给数据得

*m*1 = 4.10×102 kg ⑲

*m*2 = 5.90×102 kg ⑳

*v*B = 1.04×104 m/s ㉑

（3）由于Q在A点和B点时的速度均与当时Q所在矢径（从行星中心指向Q）垂直，因此Q的轨道为椭圆，即Q为行星的卫星。

A、B点为Q的椭圆轨道和其长轴的交点，有

$r+R=2a$ ㉒

式中，a为Q的椭圆轨道的半长轴。设Q的运动周期为*T*1，由开普勒第三定律得

$\frac{a^{3}}{T\_{1}^{2}}=\frac{r^{3}}{T^{2}}$ ㉓

联立㉒㉓式得

$T\_{1}=\frac{\sqrt{2}T}{4}(\frac{r+R}{r})^{3/2}$ ㉔

由⑤㉔式和题给数据得

*T*1 = 162 min ㉕

评分标准：本题40分。

第（1）问15分，①式3分，②③式各2分，④⑤⑥⑦式各1分，⑧⑨式各2分；

第（2）问17分，⑩⑪式各1分，⑫⑬⑭⑮式各2分，⑯⑰⑱⑲⑳式各1分，㉑式2分；

第（3）问8分，\*2分，㉒式1分，㉓式2分，㉔式1分，㉕式2分。