# 第21届全国中学生物理竞赛复赛题试卷

本卷共七题，满分140分.

## 一、（20分）

薄膜材料气密性能的优劣常用其透气系数来加以评判。对于均匀薄膜材料，在一定温度下，某种气体通过薄膜渗透过的气体分子数*N*＝*k*，其中*t*为渗透持续时间，*S*为薄膜的面积，*d*为薄膜的厚度，Δ*p*为薄膜两侧气体的压强差，*k*称为该薄膜材料在该温度下对该气体的透气系数。透气系数愈小，材料的气密性能愈好。

K3

K2

*P*1 *V*1

## C

C΄

*P*0 *V*0

# E

# F

# G

# I

# H

K1

图为测定薄膜材料对空气的透气系数的一种实验装置示意图。*EFGI*为渗透室，U形管左管上端与渗透室相通，右管上端封闭；U形管内横截面积*A*＝0.150cm2。实验中，首先测得薄膜的厚度*d*＝0.66mm，再将薄膜固定于图中CCʹ处，从而把渗透室分为上下两部分，上面部分的容积*V*0＝25.00cm3，下面部分连同U形管左管水面以上部分的总容积为*V*1，薄膜能够透气的面积*S*＝1.00cm2。打开开关K1、K2与大气相通，大气的压强*p*1＝1.00atm，此时U形管右管中气柱长度*H*＝20.00cm，*V*1＝5.00cm3。关闭K1、K2后，打开开关K3，对渗透室上部分迅速充气至气体压强*p*0＝2.00atm，关闭K3并开始计时。两小时后，U形管左管中的水面高度下降了Δ*H*＝2.00cm。实验过程中，始终保持温度为0℃。求该薄膜材料在0℃时对空气的透气系数。（本实验中由于薄膜两侧的压强差在实验过程中不能保持恒定，在压强差变化不太大的情况下，可用计时开始时的压强差和计时结束时的压强差的平均值来代替公式中的Δ*p*。普适气体常量*R*＝8.31J·mol-1·K-1，1.00atm＝1.013×105Pa）。

## 一、解答

开始时U形管右管中空气的体积和压强分别为

 *V*2 ＝ *HA* （1）

 *p*2＝ *p*1

经过2小时，U形管右管中空气的体积和压强分别为

  （2）

  （3）

渗透室下部连同U形管左管水面以上部分气体的总体积和压强分别为

  （4）

  （5）

式中**为水的密度，*g*为重力加速度。由理想气体状态方程可知，经过2小时，薄膜下部增加的空气的摩尔数

  （6）

在2个小时内，通过薄膜渗透过去的分子数

  （7）

式中*N*A为阿伏伽德罗常量。

渗透室上部空气的摩尔数减少，压强下降。下降了*p*

  （8）

经过2小时渗透室上部分中空气的压强为

  （9）

测试过程的平均压强差

  （10）

根据定义，由以上各式和有关数据，可求得该薄膜材料在0℃时对空气的透气系数

 *k*＝＝2.4×1011Pa-1m-1s-1 （11）

评分标准：

本题20分。（1）、（2）、（3）、（4）、（5）式各1分，（6）式3分，（7）、（8）、（9）、（10） 式各2分，（11）式4分。

## 二、（20分）

两颗人造卫星绕地球沿同一椭圆轨道同向运动，它们通过轨道上同一点的时间相差半个周期。已知轨道近地点离地心的距离是地球半径*R*的2倍，卫星通过近地点时的速度*v*＝，式中*M*为地球质量，*G*为引力常量。卫星上装有同样的角度测量仪，可测出卫星与任意两点的两条连线之间的夹角。试设计一种测量方案，利用这两个测量仪测定太空中某星体与地心在某时刻的距离。（最后结果要求用测得量和地球半径*R*表示）

## 二、解答

如图，卫星绕地球运动的轨道为一椭圆，地心位于轨道椭圆的一个焦点*O*处，设待测量星体位于*C*处。根据题意，当一个卫星运动到轨道的近地点*A*时，另一个卫星恰好到达远地点*B*处，只要位于*A*点的卫星用角度测量仪测出*AO*和*AC*的夹角**1，位于*B*点的卫星用角度测量仪测出*BO*和*BC*的夹角**2，就可以计算出此时星体*C*与地心的距离*OC*。

因卫星椭圆轨道长轴的长度

  （1）

式中*r*近、与*r*远分别表示轨道近地点和远地点到地心的距离。由角动量守恒

 （2）

A

# B

## O

# *1*

式中*m*为卫星的质量。由机械能守恒

 （3）

已知

， 

# C

得  （4）

所以  （5）

在△*ABC*中用正弦定理

  （6）

所以  （7）

地心与星体之间的距离为，在△*BOC*中用余弦定理

  （8）

由式（4）、（5）、（7）得

OC＝2*R* （9）

评分标准：

本题20分。（1）式2分，（2）、（3）式各3分，（6） 、（8）式各3分， （9） 式6分。

## 三、（15分）

μ子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命τ0≈2.0×10-6s。宇宙射线与大气在高空某处发生核反应产生一批μ子，以*v*＝0.99*c*的速度（*c*为真空中的光速）向下运动并衰变。根据放射性衰变定律，相对给定惯性参考系，若*t*＝0时刻的粒子数为*N*（0），*t*时刻剩余的粒子数为*N*（*t*），则有*N*（*t*）＝*N*（0）e*-t*/*τ*，式中*τ*为相对该惯性系粒子的平均寿命。若能到达地面的μ子数为原来的5％，试估算μ子产生处相对于地面的高度*h*。不考虑重力和地磁场对μ子运动的影响。

## 三、解答

因子在相对自身静止的惯性系中的平均寿命



根据时间膨胀效应，在地球上观测到的子平均寿命为**，

  （1）

代入数据得

 ** ＝ 1.4×10－5s （2）

相对地面，若子到达地面所需时间为*t*，则在*t*时刻剩余的子数为

  （3）

根据题意有

  （4）

对上式等号两边取e为底的对数得

  （5）

代入数据得

  （6）

根据题意，可以把子的运动看作匀速直线运动，有

  （7）

代入数据得

 *h*＝1.24×104m （8）

评分标准：

本题15分。 （1）式或（2）式6分，（4）式或（5）式4分，（7） 式2分，（8） 式3分。

## 四、（20分）

目前，大功率半导体激光器的主要结构形式是由许多发光区等距离地排列在一条直线上的长条状，通常称为激光二极管条。但这样的半导体激光器发出的是很多束发散光束，光能分布很不集中，不利于传输和应用。为了解决这个问题，需要根据具体应用的要求，对光束进行必需的变换（或称整形）。如果能把一个半导体激光二极管条发出的光变换成一束很细的平行光束，对半导体激光的传输和应用将是非常有意义的。为此，有人提出了先把多束发散光会聚到一点，再变换为平行光的方案，其基本原理可通过如下所述的简化了的情况来说明。

如图，S1、S2、S3是等距离（*h*）地排列在一直线上的三个点光源，各自向垂直于它们的连线的同一方向发出半顶角为*α*＝arctan的圆锥形光束。请使用三个完全相同的、焦距为*f*＝1.50*h*、半径为*r*＝0.75*h*的圆形薄凸透镜，经加工、组装成一个三者在同一平面内的组合透镜，使三束光都能全部投射到这个组合透镜上，且经透镜折射后的光线能全部会聚于*z*轴（以S2为起点，垂直于三个点光源连线，与光束中心线方向相同的射线）上距离S2为*L*＝12.0*h*处的P点。（加工时可对透镜进行外形的改变，但不能改变透镜焦距。）

*z*

*L*

*S*1

*S*3

# P

**

**

*S*2

# 

*h*

*h*

（1）求出组合透镜中每个透镜光心的位置。

（2）说明对三个透镜应如何加工和组装，并求出有关数据。

## 四、解答

#  z

**

*L*

*S*1

# P

**

*S*2

# 

*h*

*h*



*S*3*’*

*O*1

*O*2(*S*2*’*)

*O*3

图1

*M’*

# M

*u*

（1）考虑到使3个点光源的3束光分别通过3个透镜都成实像于*P*点的要求，组合透镜所在的平面应垂直于*z*轴，三个光心*O*1、*O*2、*O*3的连线平行于3个光源的连线，*O*2位于*z*轴上，如图1所示。图中表示组合透镜的平面，、*、*为三个光束中心光线与该平面的交点。  ＝ *u*就是物距。根据透镜成像公式

  （1）

可解得

 

因为要保证经透镜折射后的光线都能全部会聚于*P*点，来自各光源的光线在投射到透镜之前不能交叉，必须有2*u*tan** ≤*h*即*u*≤2*h*。在上式中取“－”号，代入*f* 和*L*的值，算得

 ≈1.757*h* （2）

此解满足上面的条件。

分别作3个点光源与*P*点的连线。为使3个点光源都能同时成像于*P*点，3个透镜的光心*O*1、*O*2、*O*3应分别位于这3条连线上（如图1）。由几何关系知，有

  （3）

即光心*O*1的位置应在之下与的距离为

  （4）

同理，*O*3的位置应在之上与的距离为0.146*h*处。由（3）式可知组合透镜中相邻薄透镜中心之间距离必须等于0.854*h*，才能使S1、S2、S3都能成像于P点。

（2）现在讨论如何把三个透镜L1、L2、L3加工组装成组合透镜。

因为三个透镜的半径*r*＝0.75*h*，将它们的光心分别放置到O1、O2、O3处时，由于＝＝0.854*h*＜2*r*，透镜必然发生相互重叠，必须对透镜进行加工，各切去一部分，然后再将它们粘起来，才能满足（3）式的要求。由于对称关系，我们只需讨论上半部分的情况。

图2画出了L1、L2放在平面内时相互交叠的情况（纸面为平面）。图中*C*1、*C*2表示*L*1、*L*2的边缘，、为光束中心光线与透镜的交点，*W*1、*W*2分别为*C*1、*C*2与*O*1*O*2的交点。

为圆心的圆1和以（与O2重合）为圆心的圆2分别是光源S1和S2投射到L1和L2时产生的光斑的边缘，其半径均为

0.146*h*

0.854*h*

0.439*h*

0.439*h*

*h*

*S*1*’*

*O*2 (*S*2*’*)

*O*1

*W*1

*W*2

*Q*

*Q’*

*N*

*N’*

*T*

*T’*

*C*1

*C*2*’*

圆1

圆2

图2

*x*2

*x*1

*K*

  （5）

根据题意，圆1和圆2内的光线必须能全部进入透镜。首先，圆1的*K*点（见图2）是否落在*L*1上？由几何关系可知

 （6）

故从*S*1发出的光束能全部进入*L*1。为了保证全部光束能进入透镜组合，对*L*1和*L*2进行加工时必须保留圆1和圆2内的透镜部分。

下面举出一种对透镜进行加工、组装的方法。在O1和O2之间作垂直于O1O2且分别与圆1和圆2相切的切线QQʹ和NNʹ。若沿位于QQʹ和NNʹ之间且与它们平行的任意直线TTʹ对透镜L1和L2进行切割，去掉两透镜的弓形部分，然后把它们沿此线粘合就得到符合所需组合透镜的上半部。同理，对L2的下半部和L3进行切割，然后将L2的下半部和L3粘合起来，就得到符合需要的整个组合透镜。这个组合透镜可以将S1、S2、S3发出的全部光线都会聚到P点。

现在计算和的位置以及对各个透镜切去部分的大小应符合的条件。设透镜*L*1被切去部分沿*O*1*O*2方向的长度为*x*1，透镜*L*2被切去部分沿*O*1*O*2方向的长度为*x*2，如图2所示，则对任意一条切割线， *x*1、*x*2之和为

  （7）

由于必须在和之间，从图2可看出，沿切割时，*x*1达最大值（*x*1*M*），*x*2达最小值（*x*2*m*），

 

代入*r*，**和的值，得

  （8）

代入（7）式，得

  （9）

由图2可看出，沿切割时，*x*2达最大值（*x*2*M*），*x*1达最小值（*x*1*m*），

 

代入*r*和**的值，得

  （10）

  （11）

由对称性，对*L*3的加工与对*L*1相同，对*L*2下半部的加工与对上半部的加工相同。

评分标准：

本题20分。第1问10分，其中（2）式5分，（3）式5分，

第2问10分，其中（5）式3分，（6）式3分，（7）式2分，（8）式、（9）式共1分，（10）式、（11）式共1分。

如果学生解答中没有（7）—（11）式，但说了“将图2中三个圆锥光束照射到透镜部分全部保留，透镜其它部分可根据需要磨去（或切割掉）”给3分，再说明将加工后的透镜组装成透镜组合时必须保证*O*1*O*2＝*O*1*O*2＝0.854*h*，再给1分，即给（7）—（11）式的全分（4分）。

## 五、（20分）

如图所示，接地的空心导体球壳内半径为*R*，在空腔内一直径上的P1和P2处，放置电量分别为*q*1和*q*2的点电荷，*q*1＝*q*2＝*q*，两点电荷到球心的距离均为*a*。由静电感应与静电屏蔽可知：导体空腔内表面将出现感应电荷分布，感应电荷电量等于－2*q*。空腔内部的电场是由*q*1、*q*2和两者在空腔内表面上的感应电荷共同产生的。由于我们尚不知道这些感应电荷是怎样分布的，所以很难用场强叠加原理直接求得腔内的电势或场强。但理论上可以证明，感应电荷对腔内电场的贡献，可用假想的位于腔外的（等效）点电荷来代替（在本题中假想（等效）点电荷应为两个），只要假想的（等效）点电荷的位置和电量能满足这样的条件，即：设想将整个导体壳去掉，由*q*1在原空腔内表面的感应电荷的假想（等效）点电荷*q*1ʹ与*q*1共同产生的电场在原空腔内表面所在位置处各点的电势皆为0；由*q*2在原空腔内表面的感应电荷的假想（等效）点电荷*q*2ʹ与*q*2共同产生的电场在原空腔内表面所在位置处各点的电势皆为0。这样确定的假想电荷叫做感应电荷的等效电荷，而且这样确定的等效电荷是唯一的。等效电荷取代感应电荷后，可用等效电荷*q*1ʹ、*q*2ʹ和*q*1、*q*2来计算原来导体存在时空腔内部任意点的电势或场强。

*r*

*P*2

*P*1

**

*R*

# A

# O

*a*

*a*

（1）试根据上述条件，确定假想等效电荷*q*1ʹ、*q*2ʹ的位置及电量。

（2）求空腔内部任意点A的电势*U*A。已知A点到球心O的距离为*r*，OA与OP1的夹角为**。

## 五、解答

（1）解法Ⅰ：

如图1所示，*S*为原空腔内表面所在位置，的位置应位于OP1的延长线上的某点B1处，的位置应位于OP2的延长线上的某点B2处。设A1为S面上的任意一点，根据题意有

  （1）

*B*2

*B*1

*P*2

*P*1

*O*

*R*1

*a*

*a*

**

图1

*S*1

*A*1

 （2）

怎样才能使（1）式成立呢？下面分析图1中与的关系。

若等效电荷的位置*B*1使下式成立，即

  （3）

即  （4）

则 

有  （5）

由 （1）式和 （5）式便可求得等效电荷*q*1ʹ

 *q*1ʹ＝－*q*1 （6）

由（3）式知，等效电荷*q*1ʹ的位置B1到原球壳中心位置O的距离

 OB1＝ （7）

同理，B2的位置应使，用类似的方法可求得等效电荷

 *q*2ʹ＝－*q*2 （8）

等效电荷*q*2ʹ的位置B2到原球壳中心O位置的距离

 OB2＝ （9）

解法Ⅱ：

在图1中，设，，。根据题意，和两者在*A*1点产生的电势和为零。有

  （1＇）

式中

  （2＇）

  （3＇）

由（1＇）、（2＇）、（3＇）式得

  （4＇）

（4＇）式是以为变量的一次多项式，要使（4＇）式对任意均成立，等号两边的相应系数应相等，即

  （5＇）

  （6＇）

由（5＇）、（6＇）式得

  （7＇）

解得  （8＇）

由于等效电荷位于空腔外部，由（8＇）式求得

  （9＇）

由（6＇）、（9＇）式有

  （10＇）

考虑到（1＇）式，有

  （11＇）

同理可求得

  （12＇）

  （13＇）

2。*A*点的位置如图2所示。*A*的电势由*q*1、、*q*2、共同产生，即

  （10）

因





*B*2

*B*1

*P*2

*P*1

*O*

*R*1

*a*

*a*

**

## A

图2

*S*





代入 （10） 式得

*U*A＝*kq*（－＋－） （11）

评分标准：

本题20分。第1问18分，解法Ⅰ中（1）、（2）、（6）、（7）、（8）、（9） 式各3分。解法Ⅱ的评分可参考解法Ⅰ。

第2问2分，即（11）式2分。

## 六、（20分）

如图所示，三个质量都是*m*的刚性小球A、B、C位于光滑的水平桌面上（图中纸面），A、B之间，B、C之间分别用刚性轻杆相连，杆与A、B、C的各连接处皆为“铰链式”的（不能对小球产生垂直于杆方向的作用力）。已知杆AB与BC的夹角为π－*α*，*α*＜π/2。DE为固定在桌面上一块挡板，它与AB连线方向垂直。现令A、B、C一起以共同的速度*v*沿平行于AB连线方向向DE运动，已知在C与挡板碰撞过程中C与挡板之间无摩擦力作用，求碰撞时当C沿垂直于DE方向的速度由*v*变为0这一极短时间内挡板对C的冲量的大小。

A

B**

C**

**

D

# *E*

## 六、解答

令*I*表示题述极短时间*t*内挡板对C冲量的大小，因为挡板对C无摩擦力作用，可知冲量的方向垂直于DE，如图所示；表示B、C间的杆对B或C冲量的大小，其方向沿杆方向，对B和C皆为推力；表示*t*末了时刻C沿平行于*DE*方向速度的大小，表示*t*末了时刻B沿平行于DE方向速度的大小，表示*t*末了时刻B沿垂直于DE方向速度的大小。由动量定理，

对C有

  （1）

  （2）

对B有

  （3）

对AB有

  （4）

因为B、C之间的杆不能伸、缩，因此B、C沿杆的方向的分速度必相等。故有

  （5）

由以上五式，可解得

 *I*＝*mv* （6）

评分标准：

本题20分。 （1）、（2）、（3）、（4）式各2分。 （5）式7分，（6）式5分。

## 七、（25分）

*x*

*O*

 *y*

*v*0

c

a

b

*y*

d

如图所示，有二平行金属导轨，相距*l*，位于同一水平面内（图中纸面），处在磁感应强度为*B*的匀强磁场中，磁场方向竖直向下（垂直纸面向里）。质量均为*m*的两金属杆ab和cd放在导轨上，与导轨垂直。初始时刻， 金属杆ab和cd分别位于*x*＝*x*0和*x*＝0处。假设导轨及金属杆的电阻都为零，由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数为*L*。今对金属杆ab施以沿导轨向右的瞬时冲量，使它获得初速*v*0。设导轨足够长，*x*0也足够大，在运动过程中，两金属杆之间距离的变化远小于两金属杆的初始间距*x*0，因而可以认为在杆运动过程中由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数*L*是恒定不变的。杆与导轨之间摩擦可不计。求任意时刻两杆的位置*x*ab和*x*cd以及由两杆和导轨构成的回路中的电流*i*三者各自随时间*t*的变化关系。

## 七、解答

解法Ⅰ：

当金属杆ab获得沿*x*轴正方向的初速*v*0时，因切割磁力线而产生感应电动势，由两金属杆与导轨构成的回路中会出现感应电流。由于回路具有自感系数，感应电流的出现，又会在回路中产生自感电动势，自感电动势将阻碍电流的增大，所以，虽然回路的电阻为零，但回路的电流并不会趋向无限大，当回路中一旦有了电流，磁场作用于杆ab的安培力将使ab杆减速，作用于cd杆的安培力使cd杆运动。

B**

A

C**

**

D

# *E*

## I

设在任意时刻*t*，ab杆和cd杆的速度分别为*v*1和*v*2（相对地面参考系*S*），当*v*1、*v*2为正时，表示速度沿*x*轴正方向；若规定逆时针方向为回路中电流和电动势的正方向，则因两杆作切割磁力线的运动而产生的感应电动势

  （1）

当回路中的电流*i*随时间的变化率为时，回路中的自感电动势

  （2）

根据欧姆定律，注意到回路没有电阻，有

  （3）

金属杆在导轨上运动过程中，两杆构成的系统受到的水平方向的合外力为零，系统的质心作匀速直线运动。设系统质心的速度为*V*C，有

  （4）

得

  （5）

*VC*方向与*v*0相同，沿*x*轴的正方向。

现取一新的参考系，它与质心固连在一起，并把质心作为坐标原点，取坐标轴与*x*轴平行。设相对系，金属杆ab的速度为*u*，cd杆的速度为，则有

  （6）

  （7）

因相对系，两杆的总动量为零，即有

  （8）

由（1）、（2）、（3）、（5）、（6） 、（7） 、（8）各式，得

  （9）

在系中，在*t*时刻，金属杆ab坐标为，在*t*＋*t*时刻，它的坐标为，则由速度的定义

  （10）

代入 （9） 式得

  （11）

若将视为*i*的函数，由（11）式知为常数，所以与*i*的关系可用一直线方程表示

  （12）

式中*b*为常数，其值待定。现已知在*t*＝时刻，金属杆ab在系中的坐标＝，这时*i* ＝ 0，故得

  （13）

或  （14）

表示*t*＝时刻金属杆ab的位置。表示在任意时刻*t*，杆ab的位置，故就是杆ab在*t*时刻相对初始位置的位移，用*X*表示，

  （15）

当*X*>0时，ab杆位于其初始位置的右侧；当*X*<0时，ab杆位于其初始位置的左侧。代入（14）式，得

  （16）

 这时作用于ab杆的安培力

  （17）

ab杆在初始位置右侧时，安培力的方向指向左侧；ab杆在初始位置左侧时，安培力的方向指向右侧，可知该安培力具有弹性力的性质。金属杆ab的运动是简谐振动，振动的周期

  （18）

在任意时刻*t*， ab杆离开其初始位置的位移

  （19）

*A*为简谐振动的振幅，**为初相位，都是待定的常量。通过参考圆可求得ab杆的振动速度

 ** （20）

 （19）、（20）式分别表示任意时刻ab杆离开初始位置的位移和运动速度。现已知在*t*＝0时刻，ab杆位于初始位置，即

 *X* ＝ 0

速度

 

故有

 

 

解这两式，并注意到（18）式得

  （21）

  （22）

由此得ab杆的位移

  （23）

由 （15） 式可求得ab杆在系中的位置

  （24）

因相对质心，任意时刻ab杆和cd杆都在质心两侧，到质心的距离相等，故在系中，cd杆的位置

  （25）

相对地面参考系*S*，质心以的速度向右运动，并注意到（18）式，得ab杆在地面参考系中的位置

 *x*ab＝*x*0＋*v*0*t*＋sin（*Bl*）*t* （26）

cd杆在*S*系中的位置

 *x*cd＝*v*0*t*－sin（*Bl*）*t* （27）

回路中的电流由 （16） 式得

 *i*＝sin*t*＝*v*0sin（*Bl*）*t* （28）

解法Ⅱ：

当金属杆在磁场中运动时，因切割磁力线而产生感应电动势，回路中出现电流时，两金属杆都要受到安培力的作用，安培力使ab杆的速度改变，使cd杆运动。设任意时刻*t*，两杆的速度分别为*v*1和*v*2（相对地面参考系*S*），若规定逆时针方向为回路电动势和电流的正方向，则由两金属杆与导轨构成的回路中，因杆在磁场中运动而出现的感应电动势为

  （1*’*）

令*u*表示ab杆相对于cd杆的速度，有

  （2*’*）

当回路中的电流*i*变化时，回路中有自感电动势*EL*，其大小与电流的变化率成正比，即有

  （3*’*）

根据欧姆定律，注意到回路没有电阻，有

 

由式（2*’*）、（3*’*）两式得

  （4*’*）

设在*t*时刻，金属杆ab相对于cd杆的距离为，在*t*＋*t*时刻，ab相对于cd杆的距离为＋，则由速度的定义，有

  （5*’*）

代入 （） 式得

  （6*’*）

若将视为*i*的函数，由（6*’*）式可知，为常量，所以与*i*的关系可以用一直线方程表示，即

  （7*’*）

式中*b*为常数，其值待定。现已知在*t*＝时刻，金属杆ab相对于cd杆的距离为，这时*i* ＝ 0，故得

  （8*’*）

或  （9*’*）

表示*t*＝时刻金属杆ab相对于cd杆的位置。表示在任意时刻*t*时ab杆相对于cd杆的位置，故就是杆ab在*t*时刻相对于cd杆的相对位置相对于它们在*t*＝时刻的相对位置的位移，即从*t*＝到*t*＝*t*时间内ab杆相对于cd杆的位移

  （10*'*）

于是有

  （11*’*）

任意时刻*t*，ab杆和cd杆因受安培力作用而分别有加速度*a*ab和*a*cd，由牛顿定律有

  （12*’*）

  （13*’*）

两式相减并注意到（）式得

  （14*’*）

 式中为金属杆ab相对于cd杆的加速度，而*X*是ab杆相对cd杆相对位置的位移。是常数，表明这个相对运动是简谐振动，它的振动的周期

  （15*’*）

在任意时刻*t*，ab杆相对cd杆相对位置相对它们初始位置的位移

  （16*’*）

*A*为简谐振动的振幅，**为初相位，都是待定的常量。通过参考圆可求得*X*随时间的变化率即速度

 ** （17*’*）

现已知在*t*＝0时刻，杆位于初始位置，即*X* ＝ 0，速度

故有

 

 

解这两式，并注意到（15’） 式得

 

 

由此得

  （18*’*）

因*t* ＝ 0时刻，cd杆位于*x* ＝ 0 处，ab杆位于*x* ＝ *x*0 处，两者的相对位置由*x*0表示；设*t*时刻，cd杆位于*x* ＝ *x*cd 处，ab杆位于*x* ＝ *x*ab处，两者的相对位置由*x*ab－*x*cd表示，故两杆的相对位置的位移又可表示为

 *X* ＝ *x*ab－*x*cd－*x*0 （19*’*）

所以

  （20*’*）

（12*’*）和（13*’*）式相加,

 

得

 

由此可知，两杆速度之和为一常数即*v*0，所以两杆的位置*x*ab和*x*cd之和应为

 *x*ab＋*x*cd ＝ *x*0＋*v*0*t* （21*’*）

由（20*’*）和（21*’*）式相加和相减，注意到（15*’*）式，得

  （22*’*）

  （23*’*）

由（11*’*）、（19*’*）（22*’*）、（23*’*）式得回路中电流

  （24*’*）

评分标准：本题25分。

解法Ⅰ 求得（16）式8分，（17）、（18）、（19）三式各2分。 （23）式4分，（24）、（25）二式各2分，（26）、（27）、（28）三式各1分。

解法Ⅱ的评分可参照解法Ⅰ评分标准中的相应式子给分。