# 1.2 符号和定义

本节将对本书中涉及的一些数学符号进行说明，关于本书中用到的名词的详细解释可参见附录A。

## 1.2.1 数学符号

表1.1总结本书用到的的大部分数学符号，这里对其中的部分概念进行详细解释。

**表1.1 本书中使用的符号汇总**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 类型 | 符号表示 | 示例 |
| 角度 | 小写希腊字母 | αi，φ，η，ρ，γ242，θ |
| 标量 | 小写斜体 | a，b，t，uk，v，wij |
| 向量或者点 | 小写粗体 | **a**，**u**，**v**s，**h**(ρ)，**h**z |
| 矩阵 | 大写粗体 | **T**(t)，**X**，**R**x(ρ) |
| 平面 | π：向量＋标量 | π：**n**·**x**＋d＝0，π1：**n**1·**x**＋d1＝0 |
| 三角形 | △三个点 | △**v**0**v**1**v**2，△**cba** |
| 线段 | 两个点 | **uv**，**a**i**b**j |
| 几何实体 | 大写斜体 | *AOBB*，*T*，*BAABB* |

角度和标量均属于实数集R，也就是说，它们都是实数。向量和点用黑体小写字母表示，相关分量可以用下列形式存取。

$v=\left(\begin{matrix}v\_{x}\\v\_{y}\\v\_{z}\end{matrix}\right)$ （1.1）

即这是一种列向量形式，目前在计算机图形学界普遍采用这种表示形式。在本书很多地方，常常使用（v­x，vy、vz），而不是（v­x vy vz）T形式，这是因为前者的可读性要好一些。

在齐次坐标系中（参见附录A.4节）。坐标可以用（v­x vy vz vw）T表示。其中一个向量是**v**＝（v­x vy vz 0）T，一个点是**v**＝（v­x vy vz 1）T。有时候只使用具有3个元素的向量和点。但是尽可能避免出现表示类型上的歧义。对于矩阵操作来说，向量和点最好使用同一种符号表示形式（关于变换操作可参见第4章，关于齐次符号表示可参见附录A.4节）。在一些算法中，使用数字索引要比使用x、y、z更方便，如**v**＝（v­0 v1 v2）T。对于两个元素的向量来说，关于向量和点的所有这些规则依然成立，只是忽略了三元向量中的第3个分量而已。

关于矩阵．需要多一些解释，最常使用的矩阵大小是2×2、3×3、4×4。这里，通过回顾一下3×3矩阵M的相关操作，就很容易将这种操作过程扩展到其他大小的矩阵。矩阵**M**的（标量）元素可以用mij表示，其中0≤（i，j）≤2，i表示行，j表示列，具体表示参见式（1.2）。

$M=\left(\begin{matrix}m\_{00}&m\_{01}&m\_{02}\\m\_{10}&m\_{11}&m\_{12}\\m\_{20}&m\_{21}&m\_{22}\end{matrix}\right)$ （1.2）

式（1.3）中所示的关于3×3矩阵的符号表示，可以将向量和矩阵M区分开：mj表示第j个列向量，mi表示第i个行向量（以列向量形式表示）。对于向量和点来说，也可以用x、y、z或w来索引列向量，条件是这种表示方式更方便。

$M=\left(\begin{matrix}m\_{0}&m\_{1}&m\_{2}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}m\_{x}&m\_{y}&m\_{z}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}m\_{0}^{T}\\m\_{1}^{T}\\m\_{2}^{T}\end{matrix}\right)$ （1.3）

平面可以用π：**n**·**x**＋d＝0来表示，同时也是它的数学公式，包含了平面法线**n**和标量**d**，法线是表示平面朝向的一个向量，更通用的说法是（例如对于一个曲面）法线表示的是平面上一个特定点的方向，对于平面来说，所有点的法线都是相同的。π是平面表示的的常用数学符号。可以认为平面π将空间分为正半空间（其中**n**·**x**＋d＞0）和负半空间（其中**n**·**x**＋d＜0），其他所有点都位于平面上。

三角形可以用三个点**v**0、**v**1、**v**2来定义，用△**v**0**v**1**v**2来表示。

表1.2给出了其他的一些数学操作符及相应的符号表示，关于点乘、叉乘、行列式、长度等操作符参见附录A。转置操作符将一个列向量转换为一个行向量反之亦然。这样可以将列向量写成一种压缩形式如（v­x vy vz）T。关于第4个操作符，需要进一步解释：**u**⊗**v**表示向量（u­xvx uyvy uzvz）T，也就是说，向量**u**的第i个分量与向量**v**的i个分量相乘，将结果保存在新向量的第i个分量中。在本书中，这个操作符只用于颜色向量的操作中。第5个操作符是在《Graphics Gems Ⅳ》书中引入的，它是作用在二维向量上的一元操作符，如果将这个操作符作用于向量**v**＝（v­x vy）T，那么就可以生成一个与v垂直的向量v⊥＝（－vy  vx）T。可以使用|a|来表示标量a的绝对值，|**A**|表示矩阵**A**的行列式。有时候，也使用|A|＝|**abc**|＝det(**a**,**b**,**c**)，其中**a**、**b**、**c**是矩阵**A**的列向量。表1.2中的第9个操作符，也就是阶乘，可以用如下形式来定义（注意0！＝1）：

n!＝n（n－1）（n－2）……3·2·1 （1.4）

第10个操作符，也就是二项式因子，可以用式（1.5）的形式来定义：

$$\left(\frac{n}{k}\right)=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

 （1.5）

**表1.2 一部分数学操作符的表示形式**

|  |  |
| --- | --- |
| 操作符 | 说明 |
| · | 点乘 |
| × | 叉乘 |
| **v**T | 向量**v**的转置 |
| ⊗ | 分段向量相乘 |
| ⊥ | 一元垂直点乘操作符 |
| |·| | 矩阵的行列式 |
| |·| | 标量的绝对值 |
| ||·|| | 变量长度（或者范数） |
| n！ | 阶乘 |
| $$\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)$$ | 二项式因子 |

此外，可以称平面x＝0、y＝0、z＝0为坐标平面（Coordinate Planes）或者轴对齐平面（Axis-aligned Planes），这组轴通常也称为标准基（Standard Basis）。如果没有特别注明，一般使用标准正交基（包括两个相互垂直的单位向量，具体参见附录A.3.1节）。

符号［a，b］表示所有位于a和b之间的数，其中包含a和b。如果希望所有的数处于a和b之间，但不包含a和b那么就可以写成（a，b）。此外，也可以将这两种表示结合起来使用，例如，［a,b）表示位于a和b之间，包含a但没有包含b。

在本书中也经常用到C语言中的数学函数atan2（y，x），它是数学函数arctan（x）的一种扩展。两者之间的主要差别是，－π/2＜arctan（x）＜π/2，0≤atan2（y，x）≤2π，而且在后面的函数中增加了一个额外变量，用来避免零除问题，也就是说x＝y/x，但不能出现x＝0。

表1.3 一些特殊数学函数的表示方法

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 函数 | 说明 |
| 1 | atan2(y,x) | 两个量的反正切函数 |
| 2 | $$\overline{cos}(θ)$$ | 截取余弦函数 |
| 3 | log(n) | n的自然对数 |

截取余弦函数，$\overline{cos}(θ)$ 用于让着色方程便于阅读，如果余弦函数的结果小于零，那么通过这个函数返回的结果就是0。

本书中的符号log(n)总是表示自然对数，即以e为底的对数loge（n），而不是表示以10为底的对数log10（n）。

在计算机图形学领域，对于三维几何体来说，右手坐标系是标准坐标系，所以在本书中也使用右手坐标系统（参见附录A.2节）。

最后，颜色可以用三元向量来表示，如（red，green，blue），其中每个元素的范围在［0，1］之间。

## 1.2.2 几何定义

大多数图形硬件使用的基本绘制图元是点、线、三角形（目前，我们知道的例外情况有像素平面（Pixel-Planes），它可以绘制球体；此外，还有NVIDIA NV1芯片，它可以进行椭圆体的绘制）。

在本书中几何实体集合一般指的是一个模型或者物体。一个场景是由很多模型组成的，这些模型位于需要绘制的环境中。场景还可以包括材质描述、光照，以及视场说明。

物体示例有小车、建筑物，甚至也可以是直线。在实际应用中，一个物体通常包含一组绘制图元，但也不是永远如此；物体可以具有一种比较高的几何表示形式，比如Bezier曲线或者表面、细分表面等。此外，物体还可以包含其他物体，比如，可以认为小车的门就是一个物体或者是小车的子集。

## 1.3 进一步阅读资料与相关资源

推荐你参考的最重要资源就是本书的网站：<http://www.realtimerendering.com/>，其中包含有最新信息，以及与每一章有关的相关网站链接。计算机实时绘制技术正在以“实时”的速度向前发展，所以在本书中，我们试图将重点集中在基本的概念，以及不可能过时的技术上。通过这个网站，我们给出了一些与今软件开发商相关的信息，从而可以使读者很好地跟踪当前的发展。