# 论形——小蚂蚁游记

哲学家热中于形而上，物理学家专注于形而下，数学家钟情形之中，艺术家神游形之外

上次“说数”，这次“论形”。数和形均属于数学的内容，两者有密切的联系。数学中有一门几何学专论形，另一门解析几何学将数与形联系起来。

形是空间中的形象，从简到繁依次有点、线、面、体四种。不妨从最简单的点开始，逐个道来。

几何学的点是没有大小和形状的，它代表空间中的一个位置，可以用称为“坐标”的一组数来表示。例如读者面前这张纸是一个二维的平面，为了定坐标，可以引入两根“坐标轴”：一根在纸的底边从左到右称为横轴；另一根在纸的左边自下而上称为纵轴。这样规定后点和数就一一对应了；纸上的一个点可以用坐标（x，y）来表示，x是该点到纵轴的距离，y是该点到横轴的距离。别小看了点与数的这种对应关系，它对数学的发展起到了重大作用，是法国数学家笛卡尔（R．Descart，1596-1650）的伟大贡献，他首先引入坐标概念，创建了解析几何学。

移动点就形成线。设想一只小蚂蚁在纸上爬行，如果忽略蚂蚁的大小，把它当作一个点，它爬行的轨迹就是线。最简单的线是直线，一根直线要用多少数来表示呢？这是非常有趣的问题：一根直线包含着无限多个点，每个点要用一组数来表示，所以一根直线要用无限多组数才能表示。乍看，这似乎有道理，其实不然！中学生都知道：两点决定一直线，所以只要两组数就够了。但这与上述说法怎样统一起来呢？答案在于所包含的信息。“信息？”是的！这个疑问可以用信息来解答。设想你要蚂蚁爬一根直线，可以这样下命令：“从A点出发，朝着B点一直爬过去。”蚂蚁遵照这个命令就爬出一根你所指定的直线来。这根直线确实包含无限多个点，如果没有你的命令，蚂蚁在任何一个点上都可以转向从而偏离直线，但它必须遵照命令，那就别无选择。原来如此！任意的线（对应于蚂蚁任性地乱爬）确实包含无限多的信息，但直线的“直”加了非常强的约束，使得代表A、B的两组数就包含了全部所需的信息——你的命令不就是这样下的吗？约束限制自由、减少信息，这是一个普遍适用的原理。

再来看曲线。曲线弯弯曲曲，几乎处处在转向，怎样用数来表示呢？根据笛卡儿的坐标系，曲线上的每一个点都对应于（x，y）一组数，无限多个点就对应无限多组数，似乎真的包含着无限信息。其实不尽然。多数曲线只包含很有限的信息，这是因为一般曲线上的无限多个点所对应的（x，y）可以由一个方程来表示。例如圆周作为一根曲线可以用方程表示为：（x－a）2＋（y－b）2＝c2。其中（a，b）是圆心的坐标，c是半径的长度。可见只要给出a、b、c三个数值，圆周曲线就完全确定了，它只包含很有限的信息。圆周曲线所对应的是二次方程，更复杂的曲线可以用更高次的方程来代表，除了非常特殊的例外，一般仍只包含有限的信息。

曲线包含无限多的点，而且处处可以转向，为什么只包含有限的信息呢？答案还在于约束？对曲线的约束虽然不像对直线的那样强，但仍有相当多的限制：首先是连续性，曲线不能断开——相当于蚂蚁只能爬不能跳跃；其次是光滑性，曲线只能弯不能折——相当于蚂蚁可以缓转弯，但不能急转弯。这些限制规定了那只蚂蚁只能按照方程的指令规规矩矩地爬，不允许任性乱来，这就是约束。这些约束减少了信息，产生出连续的光滑曲线，表现出美。“美？”是的！艺术家欣赏曲线美，画家画模特儿不就是在寻求人体的曲线美吗？曲线、信息、约束和美之间有内在的联系，很值得探讨，以后有机会再详谈。

蚂蚁爬的例子形象地告诉我们：移动点形成线。同样的道理：移动线就形成面。设想在这张纸上方那根直线上截取一小段沿纵向平行移动一段长距离，其轨迹就形成一个矩形，即俗称的长方形，这是平面。现在将这个矩形长条剪下，弯到首尾相连，用浆糊粘结起来，就形成一个环状的圆柱面，这是曲面。曲面有许多有趣的性质，这里只能略举一二。请在上述圆柱面（称为曲面A）的里面涂上蜜糖，然后将一只蚂蚁放在外面，下令说：“不准越过边界！”可怜的蚂蚁闻到蜜糖的香味，但爬来爬去，就是吃不到蜜糖。原因很简单：曲面A有里外两面，只在外面爬的蚂蚁不越过边界就吃不到里面的蜜糖。现在来制作曲面B：重复制作曲A的步骤，但在粘结时将纸带的一端翻一个面，就形成了著名的牟比乌斯（Mobius）带。重复蚂蚁的实验，“奇迹”发生了！遵命未越过边界的蚂蚁竟吃到了蜜糖。聪明的读者会说：“有什么稀奇！你在粘结时翻了一个面不就将里、外两面连起来了吗？”说得很对！但是天底下竞有这样一种里外不分的单面曲面！你事先想到过吗？至此，我们已看到A、B两种曲面有本质的不同，这是拓扑性质的差异，是数学的一个分支——拓扑学研究的对象。



**牟比乌斯带上的蚂蚁（为显示背后的蚂蚁，带被镂空成网络状）**

同样的道理：移动面就形成体。桌上的这张纸只有长、宽二维，体却有长、宽、高三维，所以要形成体就要向空间移动。从纸上剪下一个圆，这是平面。将之平放垂直向天花板移动，其轨迹就形成一个直立的圆柱。将之平放斜着向天花板移动，就形成一个斜立的椭圆柱。将之立起来绕其直径旋转，就形成一个圆球。将之立起来绕圆外的一根轴旋转，就形成一个轮胎体。前面三种体与最后的轮胎体有原则的区别，分属于不同的拓扑类型，原因是后者有一个洞而前者没有。别小看了这种差别，最新的超弦理论认为各种基本粒子的差别，可能起源于十维或十一维时空的的拓扑性质，即其中洞的数目及其连通关系。

我们已看到，从点出发可以形成各种各样的线、面、体，大千世界中林林总总的形象都可以包括在内，这就是数学的综合威力。我们还看到：数和形是天生联系在一起的，几乎所有关于数的知识都可以应用于研究形，反之亦然，这给数学家以极大的方便。发现这种联系主要是笛卡儿的功劳。他还是一位知识渊博的思想家，“我思故我在”就是他说的。这句被广泛引用的名言曾被批评为唯心主义，我认为这很不公道，争少是一种曲解。其实这句话包含着很深刻的含义，回忆《雨伞·包袱·我》一文中“我是什么？”的问题，就可以明白“我思故我在”比那些貌似唯物主义的回答更接近真理、这提醒我们在学术领域中千万不要贴标签，扣帽子，否则就会扼杀生机。

以一则寓言结尾。穿西装的小蚂蚁昂首对穿长袍的大蚂蚁说：“别看我小，我能爬出一切形体，爬出整个世界来！”大蚂蚁说：“好啊！你可以称霸天下了”小蚂蚁说：“那可不行！我得遵照笛卡尔的方程，不能任性乱爬”大蚂蚁说：“你活到70岁，就能随心所欲不逾矩了”小蚂蚁似懂非懂，匆匆忙忙地爬去找蜜糖了。