# 第22届全国中学生物理竞赛复赛题

一、（15分）

图中的AOB是游乐场中的滑道模型，它位于竖直平面内,由两个半径都是*R*的1/4圆周连接而成，它们的圆心O1、O2与两圆弧的连接点O在同一竖直线上。O2B沿水池的水面。一小滑块可由弧AO的任意点从静止开始下滑。

*O*1

*O*2

*O*

*A*

*B*

（1）若小滑块从开始下滑到脱离滑道过程中，在两个圆弧上滑过的弧长相等，则小滑块开始下滑时应在圆弧AO上的何处？（用该处到O1的连线与竖直线的夹角表示）。

（2）凡能在O点脱离滑道的小滑块，其落水点到O2的距离如何？

一、解答

1。如图所示，设滑块出发点为，离开点为，按题意要求、与竖直方向的夹角相等，设其为，若离开滑道时的速度为*v*，则滑块在处脱离滑道的条件是

*O*1

*O*2

*O*

*A*

*B*

*P*1

*P*2

**

**

  （1）

由机械能守恒

 （2）

（1）、（2）联立解得

 cos*θ*＝或 （3）

2。设滑块刚能在*O*点离开滑道的条件是

  （4）

*v*0为滑块到达*O*点的速度，由此得

  （5）

设到达*O*点的速度为*v*0的滑块在滑道*OA*上的出发点到的连线与竖直的夹角为，由机械能守恒，有

  （6）

由（5）、（6）两式解得

  （7）

若滑块到达*O*点时的速度，则对*OB*滑道来说，因*O*点可能提供的最大向心力为*mg*，故滑块将沿半径比*R*大的圆周的水平切线方向离开*O*点。对于的滑块，其在*OA*上出发点的位置对应的角必大于，即，由于，根据机械能守恒，到达*O*点的最大速度

  （8）

由此可知，能从*O*点离开滑道的滑块速度是*v*0到之间所有可能的值，也就是说，从至下滑的滑块都将在*O*点离开滑道。以速度*v*0从*O*点沿水平方向滑出滑道的滑块，其落水点至的距离

  （9）

  （10）

由（5）、（9）、（10）式得

  （11）

当滑块以从*O*点沿水平方向滑出滑道时，其落水点到的距离

  （12）

由（8）、（10）、（12）式得

  （13）

因此，凡能从*O*点脱离滑道的滑块，其落水点到的距离在到之间的所有可能值。即

*R*≤*x*≤2*R* （14）

二、（15分）

*O*1

*O*2

*O*3

*P*

*P*2

*P*1

*O*

*R*

*R*

*r*

如图所示，*O*为半径等于*R*的原来不带电的导体球的球心，O1、O2、O3为位于球内的三个半径皆为*r*的球形空腔的球心，它们与O共面，已知OO1＝OO2＝OO3＝。在*OO*1、*OO*2的连线上距O1、O2为的P1、P2点处分别放置带电量为*q*1和*q*2的线度很小的导体（视为点电荷），在O3处放置一带电量为*q*3的点电荷，设法使*q*1、*q*2和*q*3固定不动。在导体球外的P点放一个电量为*Q*的点电荷，P点与O1、O2、O3共面，位于O3O的延长线上，到O的距离OP＝2*R*。

（1）求*q*3的电势能；

（2）将带有电量*q*1、*q*2的小导体释放，当重新达到静电平衡时，各表面上的电荷分布有何变化？此时*q*3的电势能为多少？

二、解答

（1）由静电感应知空腔1、2及3的表面分别出现­­电量为、和的面电荷，由电荷守恒定律可知，在导体球的外表面呈现出电量­­。由静电屏蔽可知，点电荷*q*1及感应电荷（）在空腔外产生的电场为零；点电荷*q*2及感应电荷（）在空腔外产生的电场为零；点电荷*q*3及感应电荷（）在空腔外产生的电场为零。因此，在导体球外没有电荷时，球表面的电量作球对称分布。

当球外*P*点处放置电荷*Q*后，由于静电感应，球面上的总电量仍为，但这些电荷在球面上不再均匀分布，由球外的*Q*和重新分布在球面上的电荷在导体球内各点产生的合场强为零。

*O*3处的电势由位于*P*点处的*Q*、导体球表面的电荷及空腔3表面的感应电荷（）共同产生。无论在球面上如何分布，球面上的面电荷到*O*点的距离都是*R*，因而在*O*点产生的电势为， *Q*在*O*点产生的电势为，这两部分电荷在*O*3点产生的电势**与它们在*O*点产生的电势相等，即有

  （1）

因*q*3放在空腔3的中心处，其感应电荷在空腔3壁上均匀分布。这些电荷在*O*3点产生的电势为

  （2）

根据电势叠加定理，*O*3点的电势为

  （3）

故*q*3的电势能

*E*p3＝*q*3*U*＝*kq*3（－） （4）

（2）由于静电屏蔽，空腔1外所有电荷在空腔1内产生的合电场为零，空腔1内的电荷*q*1仅受到腔内壁感应电荷－*q*1的静电力作用，因*q*1不在空腔1的中心O1点，所以感应电荷－*q*1在空腔表面分布不均匀，与*q*1相距较近的区域电荷面密度较大，对*q*1的吸力较大，在空腔表面感应电荷的静电力作用下，*q*1最后到达空腔1表面，与感应电荷－*q*1中和。同理，空腔2中*q*2也将在空腔表面感应电荷－*q*2的静电力作用下到达空腔2的表面与感应电荷－*q*2中和。达到平衡后，腔1、2表面上无电荷分布，腔3表面和导体球外表面的电荷分布没有变化。O3的电势仍由球外的电荷*Q*和导体球外表面的电量（*q*1＋*q*2＋*q*3）及空腔3内壁的电荷－*q*3共同产生，故O3处的电势*U*与*q*3的电势能*E*p3仍如（3）式与（4）式所示。

三、（22分）

*p*0

*r*

如图所示，水平放置的横截面积为*S*的带有活塞的圆筒形绝热容器中盛有1mol的理想气体。其内能*U*＝*CT*，*C*为已知常量，*T*为热力学温度。器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦，最大静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为*F*。图中*r*为电阻丝，通电时可对气体缓慢加热。起始时，气体压强与外界大气压强*p*0相等，气体的温度为*T*0。现开始对*r*通电，已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收。若用*Q*表示气体从电阻丝吸收的热量，*T*表示气体的温度，试以*T*为纵坐标，*Q*为横坐标，画出在*Q*不断增加的过程中*T*和*Q*的关系图线。并在图中用题给的已知量及普适气体常量*R*标出反映图线特征的各量（不要求写出推导过程）。

三、解答

答案如图所示。

*a*

*b*

*d*

*Q*

*T*

*T*0





tan**2=



**1

**2

附计算过程：

 电阻通电后对气体缓慢加热，气体的温度升高，压强增大，活塞开始有向外运动的趋势，但在气体对活塞的作用力尚未达到外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦之和以前，活塞不动，即该过程为等容过程。因气体对外不做功，根据热力学第一定律可知，在气体温度从*T*0升高到*T*的过程中，气体从电阻丝吸收的热量，

  （1）

此过程将持续到气体对活塞的作用力等于外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦之和。若用*T*1表示此过程达到末态的温度，*p*表示末态的压强，*Q*1表示此过程中气体从电阻丝吸收的热量，由等容过程方程有

  （2）

由力的平衡可知

  （3）

由（2）、（3）两式可得

  （4）

代入（1）式得

  （5）

由以上讨论可知，当时，*T*与*Q*的关系为

  （6）

在图中为一直线如图中所示，其斜率

  （7）

直线在*T*轴上的截距等于*T*0，直线*ab*的终点*b*的坐标为（*T*1，*Q*1）。

当电阻丝继续加热，活塞开始向外运动以后，因为过程是缓慢的，外界大气压及摩擦力皆不变，所以气体的压强不变，仍是*p*，气体经历的过程为等压过程。在气体的体积从初始体积*V*0增大到*V*，温度由*T*1升高到*T*的过程中，设气体从电阻丝吸收的热量为，活塞运动过程中与器壁摩擦生热的一半热量为*q*，由热力学第一定律可知

  （8）

*q*可由摩擦力做功求得，即

  （9）

代入（8）式得

  （10）

由状态方程式可知

  （11）

将（11）式和（4）式代入（10）式，得

 

即

  （12）

从开始对气体加热到气体温度升高到*T*（ >*T*1）的过程中，气体从电阻丝吸收的总热量

  （13）

把（13）式代入到（12）式，并注意到（4）式和（5），得

  （14）

由此可知，当时，*T*与*Q*的关系仍为一直线，此直线起点的坐标为，；斜率为

  （15）

在图中，就是直线*bd*，当热量*Q*从零开始逐渐增大，气体温度*T* 将从起始温度*T*0沿着斜率为*Kab*的直线上升到温度为*T*1的*b*点，然后沿着斜率为*Kbd*的直线上升，如图所示。

四、（23分）

*S*

*v*

*R*

*xA*

*O*

*l*

*r*

*O*2

*O*1

封闭的车厢中有一点光源S，在距光源*l*处有一半径为*r*的圆孔，其圆心为O1，光源一直在发光，并通过圆孔射出。车厢以高速*v*沿固定在水平地面上的*x*轴正方向匀速运动，如图所示。某一时刻，点光源S恰位于*x*轴的原点O的正上方，取此时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点。在地面参考系中坐标为*x*A处放一半径为*R*（*R*＞*r*）的不透光的圆形挡板，板面与圆孔所在的平面都与*x*轴垂直。板的圆心O2、S、、O1都等高，起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面的大屏幕（图中未画出）上。由于车厢在运动，将会出现挡板将光束完全遮住，即没有光射到屏上的情况。不考虑光的衍射。试求：

（1）车厢参考系中（所测出的）刚出现这种情况的时刻；

（2）地面参考系中（所测出的）刚出现这种情况的时刻。

四、解答

*r*

*R*

*l*

*L*

*S*

（1）相对于车厢参考系，地面连同挡板以速度*v*趋向光源*S*运动。由*S*发出的光经小孔射出后成锥形光束，随离开光源距离的增大，其横截面积逐渐扩大。若距*S*的距离为*L*处光束的横截面正好是半径为*R*的圆面，如图所示，则有

 

可得

  （1）

设想车厢足够长，并设想在车厢前端距*S*为*L*处放置一个半径为*R*的环，相对车厢静止，则光束恰好从环内射出。当挡板运动到与此环相遇时，挡板就会将光束完全遮住。此时，在车厢参考系中挡板离光源*S*的距离就是*L*。在车厢参考系中，初始时，根据相对论，挡板离光源的距离为

  （2）

故出现挡板完全遮住光束的时刻为

  （3）

 由（1）、（3）式得

*t*＝－ （4）

（2）相对于地面参考系，光源与车厢以速度*v*向挡板运动。光源与孔之间的距离缩短为

  （5）

而孔半径*r*不变，所以锥形光束的顶角变大，环到*S*的距离即挡板完全遮光时距离应为

  （6）

初始时，挡板离*S*的距离为*xA*，出现挡板完全遮住光束的时刻为

*t*ʹ＝＝－ （7）

五、（25分）

*a*1

*a*0

*a*2

一个用绝缘材料制成的扁平薄圆环，其内、外半径分别为*a*1、*a*2，厚度可以忽略。两个表面都带有电荷，电荷面密度*σ*随离开环心距离*r*变化的规律均为*σ*（*r*）＝，*σ*0为已知常量。薄圆环绕通过环心垂直环面的轴以大小不变的角加速度*β*减速转动，*t*＝0时刻的角速度为*ω*0。将一半径为*a*0（*a*0≪*a*1）、电阻为*R*并与薄圆环共面的导线圆环与薄圆环同心放置。试求在薄圆环减速运动过程中导线圆环中的张力*F*与时间*t*的关系。

提示：半径为*r*、通有电流*I*的圆线圈（环形电流），在圆心处产生的磁感应强度为*B*＝*k*（*k*为已知常量）

五、解答

用半径分别为*r*1（>*a*1），*r*2，…，*ri*，…，*rn*–1（<*a*2）的*n*-1个同心圆把塑料薄圆环分割成*n*个细圆环。第*i*个细圆环的宽度为，其环带面积

 

式中已略去高阶小量。，该细圆环带上、下表面所带电荷量之和为

 

设时刻*t*，细圆环转动的角速度为**，

 

单位时间内，通过它的“横截面”的电荷量，即为电流

 

由环形电流产生磁场的规律，该细圆环的电流在环心产生的磁感应强度为

  （1）

式中是一个微小量，注意到，有

  （2）

将各细圆环产生的磁场叠加，由（1）、（2）式得出环心*O*点处的磁感应强度：

  （3） 由于*a*0<<*a*1，可以认为在导线圆环所在小区域的磁场是匀强磁场，可由*O*点的场表示。磁场对导线环的磁通量

  （4）

由于是变化的，所以上述磁通量是随时间变化的，产生的感应电动势的大小为

  （5）

由全电路欧姆定律可知，导线环内感应电流的大小为

  （6）

设题图中薄圆环带正电作逆时针旋转，穿过导线圆环的磁场方向垂直纸面向外，由于薄圆环环作减角速转动，穿过导线圆环的磁场逐渐减小，根据楞次定律，导线圆环中的感应电流亦为逆时针方向，导线圆环各元段*l*所受的安培力都沿环半径向外。现取对于*y*轴两对称点*U*、*V*，对应的二段电流元所受的安培力的大小为

  （7）

方向如图所示，它沿*x*及*y*方向分量分别

*M*

*N*

*Q*

**

**

*f*

*fx*

*fy*

*x*

*y*

*O*

*x*

*y*

*l*

*f*

*fx*

*fy*

*l*

*U*

*V*

  （8）

  （9）

根据对称性，作用于沿半个导线圆环*QMN*上的各电流元的安培力的*x*分量之和相互抵消，即

  （10）

（式中，当时，是正的，当时，是负的，故），

而作用于沿半个导线圆环*QMN*上的各电流元的安培力的*y*分量之和为

  （11）

（式中，由于**在0之间都是正的，故），

即半个导线圆环上受的总安培力的大小为，方向沿*y*正方向，由于半个圆环处于平衡状态，所以在导线截面*Q*、*N*处所受（来自另外半个圆环）的拉力（即张力）*F*应满足。由（3）、（6）两式得

*F*＝*BIa*0＝（*ω*0－*βt*） （12）

由（12）式可见，张力*F*随时间*t*线性减小。

六、（25分）

*vB*

*vA*

*B*

*A*

*O*

两辆汽车A与B，在*t*＝0时从十字路口O处分别以速度*v*A和*v*B沿水平的、相互正交的公路匀速前进，如图所示。汽车A持续地以固定的频率*ν*0鸣笛，求在任意时刻*t*汽车B的司机所检测到的笛声频率。已知声速为*u*，且当然有*u*＞*v*A、*v*B。

六、解答

如图所示，*t*时刻汽车B位于处，距*O*点的距离为*v*B*t*。此时传播到汽车B的笛声不是*t*时刻而是较早时刻*t*1由A车发出的。汽车A发出此笛声时位于处，距*O*点的距离为。此笛声由发出点到接收点（*t*时刻B车所在点）所传播的路程为*u*（*t*–*t*1），由几何关系可知

*A*(*t*1)

*B*(*t*)

**B(*t*)

*A*(*t*)

*vB*

*vA*

*O*

**A(*t*1)

  （1）

即

 

这是以*t*1为变量的一元二次方程，其解为

 

由于，但*t*1< *t*，所以上式中只能取减号

  （2）

  （3）

令

  （4）

有

 ，  （5）

在时刻，位于处的汽车A发出的笛声沿直线（即波线）在*t*时刻传到处，以、分别表示车速与笛声传播方向的夹角，有

  （6）

  （7）

令**表示B车司机接收到的笛声的频率，由多普勒效应可知

  （8）

 由（6）、（7）、（8）式，得

*ν*＝*ν*0 （9）

七、（25分）

A

B

*k*

*x*

*O*

*l*

如图所示，在一个劲度系数为*k*的轻质弹簧两端分别拴着一个质量为 *m* 的小球A和质量为2*m*的小球B。A用细线拴住悬挂起来，系统处于静止状态，此时弹簧长度为*l*。现将细线烧断，并以此时为计时零点，取一相对地面静止的、竖直向下为正方向的坐标轴*Ox*，原点*O*与此时A球的位置重合如图。试求任意时刻两球的坐标。

解答

七、解法一：

对于由小球A、B和弹簧构成的系统，当A、B之间的距离为*l*时，已知*m*A ＝ *m*，*m*B ＝ 2*m*，由质心的定义，可知系统的质心*C*离A的距离

  （1）

A

B

*k*

*x*

*O*

*l*

*C*

故A、B到质心*C*的距离分别为

  （2）

若以质心*C*为参考系（质心系），则质心*C*是固定不动的，连接A、B的弹簧可以分成两个弹簧*CA*和*CB*。设弹簧*CA*的自然长度为*lA*0，劲度系数为*kA*，一端与小球A相连，另一端固定在*C*点；弹簧*CB*的的自然长度为*lB*0，劲度系数为*kB*，一端与小球B相连，另一端亦固定在*C*点。若连接A、B的自然长度为*l*0，根据题意有

  （3）

由（2）式可知弹簧*CA*和*CB*的自然长度分别为

  （4）

 当A被悬挂，系统处于静止时，已知连接A、B的弹簧长度为*l*，由（2）式可知，此时弹簧*CA*和*CB*的长度分别为

  （5）

弹簧*CA*、*CB*作用于A、B的弹簧力分别为

 

 

但*fA* 、*fB*就是连接A、B的弹簧因拉伸而产生的弹力*f*，即有

 

由此得

  （6）

相对地面，质心*C*是运动的，在*t* ＝ 0 时刻，即细线刚烧断时刻，A位于*Ox*轴的原点*O*处，即；B的坐标。由（1）式，可知此时质心*C*的坐标为

  （7）

在细线烧断以后，作用于系统的外力是重力。故质心以*g*为加速度做匀加速直线运动，任意时刻*t*，质心的坐标

  （8）

由于质心作加速运动，质心系是非惯性系。在非惯性参考系中，应用牛顿第二定律研究物体的运动时，物体除受真实力作用外，还受惯性力作用。若在质心系中取一坐标轴，原点与质心*C*固连，取竖直向下为轴的正方向，当小球B在这参考系中的坐标为时，弹簧*CB*作用于B的弹性力

 

当时，方向竖直向上。此外，B还受到重力*mg*，方向竖直向下；惯性力大小为*mg*，方向竖直向上。作用于B的合力

 

由（3）、（4）式得

  （9）

令

  （10）

有

  （11）

当*XB* ＝ 0，作用于B的合力*FB* ＝ 0，B处于平衡状态，由（10）式，可知在质心系中，B的平衡位置的坐标

  （12）

*XB*为B离开其平衡位置的位移，（11）式表明，作用于B的合力具有弹性力的性质，故在*FB*作用下， B将在平衡位置附近作简谐振动，振动圆频率

  （13）

离开平衡位置的位移

  （14）

*AB*为振幅，为初相位。在*t* ＝ 0时刻，即细线刚烧断时刻，B是静止的，故此时B离开其平衡位置的距离就是简谐振动的振幅*AB*，而在*t* ＝ 0时刻，B离开质心的距离即（5）式给出的*lB*，故B离开平衡位置的距离即振幅

 

由（5）式、（12）式得

  （15）

因*t* ＝ 0，*XB ＝AB*，且*XB*是正的，故

 

由此得

  （16）

由（10）式，*t*时刻B在质心系中的坐标

  （17）

在地面参考系的坐标

  （18）

得

*x*B（*t*）＝*l*＋*gt*2－[1－cos（*t*）] （19）

同理，当小球A在质心系中的坐标为时，注意到是负的，这时，弹簧*CA*的伸长量为

 ，

当为负时，弹力向下，为正，当为正时，弹力向上，为负，故有

 

作用于A的合力为

 

令

 

有

 

当*XA*＝0，作用于A的合力*FB* ＝ 0，A处于平衡状态，A的平衡位置的坐标

  （20）

*XA*为A离开其平衡位置的位移，故在合力*FA*作用下， A将在平衡位置附近作简谐振动，振动圆频率

  （21）

离开平衡位置的位置

 

*AA*为振幅，为初相位。在*t* ＝ 0时刻，即细线刚烧断时刻，A是静止的，A离开质心*C*的距离为*lA*，A的平衡位置离开质心的距离为故此时A离开平衡位置的距离即为振幅*AA*，

 

而此时，故

 

由此得

  （22）

在时刻*t*，A在地面参考系中的坐标

*x*A（*t*）＝*x*C（*t*）＋*x*A0＋*X*A＝*gt*2－[1－cos（*t*）]



解法二：

当球相对于地面参考系的坐标为时，弹簧的伸长量为，所受的合力为

 

其加速度为

  

其相对于质心的加速度为

 

其中表示球相对于其平衡位置的位移，在相互平动的两个参考系中，相对位移与参考系无关。

 上式表明，相对质心，球的加速度与其相对于平衡位置的位移成正比且反向。也就是说，球相对质心作简谐振动。

 同理可证，

 

  

其相对于质心的加速度为

  

其中表示球相对于其平衡位置的位移，相对质心，球的加速度与其相对于平衡位置的位移成正比且反向，即球相对质心也作简谐振动。且有与振动的圆频率相等，

  

解法三：

在地面参考系中，列A、B的牛顿定律方程

 

2 

*x1,*

*x*2,

*k*

*x*

*O*

A

B

*x*1、*x*2是A、B的坐标，*l*0是弹簧的自然长。

 时，有

 

 

为初始时即细线刚烧断时刻，弹簧的长度，有关系

 

所以

 

由+，

 

令，是一个恒定的加速度，结合初始条件，对应的坐标和运动方程是，

  

再由，

  

这是一个以A为参考系描写B物体运动的动力学方程，且是简谐的，所以直接写出解答，

 

结合初条件，

 

 

得到

 

 

所以

 

即

  

由，得

  

由+，得

  